

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M. Ing.

PAR
Jérémie SAUVÉ

DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES ANALYTIQUES POUR UN OUTIL DE
DIMENSIONNEMENT DE CADRE DE FUSELAGE EN MATÉRIAUX COMPOSITES

MONTRÉAL, LE 10 JUILLET 2014



Jérémie Sauvé, 2014



Cette licence [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Martine Dubé, directrice de mémoire
Génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Tan Pham, président du jury
Génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Anh Dung Ngô, membre du jury
École de technologie supérieure

M. Franck Dervault, examinateur externe
Bombardier Aéronautique

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 12 MAI 2014

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je remercie Martine Dubé, directrice de recherche, pour son aide précieuse tout au long de la maîtrise. Je tiens également à remercier chaleureusement Guillaume Corriveau, professionnel ingénierie, ainsi que Franck Dervault, chef d'ingénierie, tous deux du département « Advanced Structures » chez Bombardier Aéronautique. Je remercie aussi le FRQNT-CRSNG pour leur support financier. Je remercie finalement ma femme et toute ma famille pour m'avoir soutenu durant la maîtrise.

DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES ANALYTIQUES POUR UN OUTIL DE DIMENSIONNEMENT DE CADRE DE FUSELAGE EN MATÉRIAUX COMPOSITES

Jérémie SAUVÉ

RÉSUMÉ

L'objectif du présent projet de Maîtrise est la préparation d'un ensemble de méthodes analytiques qui seront utilisées par un outil de dimensionnement de cadres de fuselage d'avion en matériaux composites. Cet outil fait l'évaluation de plusieurs modes de défaillance s'appliquant à un cadre et vérifie les marges de sécurité associées à chacun d'eux. L'outil suit un processus itératif jusqu'à l'obtention du cadre optimal pour les paramètres fixes choisis par l'utilisateur.

Les modes de défaillance du cadre pris en compte par l'outil sont la rupture du matériau composite, le flambage local, le crippling, le flambage latéral et le flambage global. Chaque mode de défaillance est associé à des formulations mathématiques, des hypothèses et des limitations. Une revue de littérature a permis d'identifier des formulations pertinentes pour faire l'évaluation des chargements ultimes associés à chacun des modes de défaillance. Également, de nouvelles formulations et méthodologies ont été développées pour combler certains manques dans la littérature concernant le flambage local et latéral. Notamment, une formulation analytique ainsi qu'une méthodologie approximative basée sur des résultats obtenus par éléments finis ont été développées. C'est deux méthodes, combinées, permettent de faire la prédiction du chargement de flambage latéral d'un cadre de fuselage en matériau composite. Finalement, le présent projet a nécessité la création de quelques outils secondaires utilisés pendant le développement de la méthodologie pour le flambage latéral. Ces outils sont aussi présentés à l'intérieur du présent mémoire.

Mots-clés : dimensionnement, cadre, matériaux composites, rupture matériau, instabilité

DEVELOPMENT OF ANALYTICAL METHODS FOR A COMPOSITE FRAMES SIZING TOOL

Jérémie SAUVÉ

ABSTRACT

The goal of this research project is to prepare a series of analytical formulations to be used by a sizing tool for composite airplane fuselage frames. This tool verifies a series of failure modes related to a frame and calculates their respective margins of safety. The tool follows an iterative process until the optimal frame is reached according to user defined parameters.

The failure modes taken into account by the sizing tool are the composite material failure, local buckling, crippling, lateral buckling and global buckling. Each phenomenon is associated with its own mathematical formulations, assumptions and limitations. Existing formulations for the margin of safety calculations of each failure phenomenon was found from a literature review. Also, new formulations were developed within the current project for local and lateral buckling. In particular, an analytical formulation and an approximation method based on results obtained from finite element have been developed. Those two methods, combined, allow the estimation of the lateral buckling load of a fuselage composite frame. Finally, the current project required to create some secondary tools used during the development of the methodology for lateral buckling. Those tools are also presented in this thesis.

Keywords: sizing, frame, composite materials, material failure, buckling

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 Revue de littérature	5
1.1 Rupture des matériaux composites	5
1.1.1 Comparaison des modèles selon le « WWFE »	5
1.1.2 Utilisation dans l'industrie	10
1.1.3 Présentation des modèles retenus	11
1.2 Flambage local	17
1.2.1 Théorie commune	20
1.2.2 Plaque simplement supportée	21
1.2.3 Plaque simplement supportée chargée en cisaillement pur – Méthode approximative	24
1.2.4 Plaque infinie simplement supportée chargée en cisaillement pur	25
1.2.5 Plaque avec un côté libre (bride) chargée en compression longitudinale	27
1.3 Crippling	28
1.3.1 Formulations retenues	30
1.4 Flambage latéral	32
1.4.1 Approche des poutres sur support élastique	33
1.4.2 Approche des plaques	34
1.4.3 Approche des poutres en torsion	37
1.4.4 Sélection d'une approche	38
1.5 Flambage global	39
1.6 Synthèse de la revue de littérature	42
CHAPITRE 2 Formulations et méthodologies développées	45
2.1 Flambage local	45
2.2 Flambage latéral	47
2.2.1 Plan d'expériences pour les cadres métalliques courbes	48
2.2.2 Outil Excel approximatif de flambage latéral d'un cadre métallique	62
2.2.3 Méthode analytique pour cadres droits en matériau composite	66
2.2.4 Méthode du facteur matériau	81
CHAPITRE 3 Intégration des critères et conception de l'outil	97
3.1 Les critères de dimensionnement	98
3.2 Les paramètres d'entrée	99
3.3 Les règles de dimensionnement	101
3.3.1 Paramètres fixes	102
3.3.2 Limite absolue (intervalle)	102
3.3.3 Limite relative	103
3.3.4 Les marges de sécurité	103

3.4	Fonctionnement de l'outil.....	104
3.5	Les limitations.....	106
CONCLUSION		107
TRAVAUX FUTURS.....		109
ANNEXE I	Évaluation des valeurs de la matrice [G]	113
ANNEXE II	Décalage des prédictions de l’Outil Excel approximatif de flambage latéral d'un cadre métallique	117
ANNEXE III	Lateral buckling criteria and survey	119
ANNEXE IV	Mesher and analysis tool	127
ANNEXE V	Approximation models generation MatLab tool	145
ANNEXE VI	Formulation développée avec la méthode de Rayleigh–Ritz	153
ANNEXE VII	ICCM19 ARTICLE : EXACT BUCKLING SOLUTION OF COMPOSITEWEB/FLANGE ASSEMBLY.....	159

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1-1	Détails des 14 scénarios de test..... 7
Tableau 1-2	Classement des qualités de prédiction 7
Tableau 1-3	Qualité des prédictions des modèles 8
Tableau 1-4	Popularité des modèles en industrie..... 10
Tableau 1-5	Synthèse des modèles de rupture des matériaux composites retenus 42
Tableau 2-1	Paramètres et valeurs testés dans le plan d'expériences pour un cadre en « C » 49
Tableau 2-2	Paramètres et valeurs testés dans le plan d'expériences pour un cadre en « I » 50
Tableau 2-3	Dimensions des ensembles peau-raidisateurs utilisés dans le plan d'expériences 50
Tableau 2-4	Groupes de nœuds considérés pour les déplacements 55
Tableau 2-5	Matrice des déplacements après la première pondération 55
Tableau 2-6	Matrice des déplacements finaux..... 55
Tableau 2-7	Proportions des modes de flambage des exemples A et B..... 57
Tableau 2-8	Résultats du sondage sur le flambage latéral (voir Annexe III pour le détail de chacun des cas)..... 59
Tableau 2-9	Configurations de validation..... 64
Tableau 2-10	Algorithme de déduction de la position de la première racine 72
Tableau 2-11	Séquences d'empilement utilisées..... 76
Tableau 2-12	Ensembles peau et de raidisseurs 77
Tableau 2-13	Rigidités équivalentes des ensembles de peau et raidisseurs..... 78
Tableau 2-14	Rigidités des ressorts équivalents (R_R)..... 91
Tableau 2-15	Résultats pour l'analyse de la méthode du facteur matériau..... 93

Tableau 3-1	Travail fait sur les critères de dimensionnement	99
Tableau 3-2	Paramètres d'entrée nécessaires pour rupture matériau	100
Tableau 3-3	Paramètres d'entrée nécessaires pour les instabilités	101

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1-1	Directions principales dans un pli de stratifié..... 11
Figure 1-2	Exemple de déformée causée par le flambage local d'un cadre..... 18
Figure 1-3	Conditions frontières d'une âme et d'une bride pour le flambage local..... 19
Figure 1-4	Plaque rectangulaire soumise à différents chargements 20
Figure 1-5	Déformée d'une plaque de longueur infinie chargée en cisaillement. Les ellipses représentent le déplacement hors-plan de la plaque..... 26
Figure 1-6	Exemple de déformée causée par le flambage latéral d'un cadre 33
Figure 1-7	Modèle simplifié suivant l'approche des poutres sur support élastique..... 34
Figure 1-8	Modèle suivant l'approche des plaques..... 35
Figure 1-9	Modèle d'une plaque représentant l'âme du cadre pour le flambage latéral..... 36
Figure 1-10	Deux modèles de plaques avec des conditions frontières semblables au cadre 37
Figure 1-11	Modèle suivant l'approche des poutres en torsion 38
Figure 1-12	Exemple de déformée causée par le flambage global sur un fuselage..... 39
Figure 1-13	Positions des raidisseurs et du cadre par rapport à la peau 41
Figure 2-1	Chargement de flambage adimensionnel d'une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés en fonction du ratio de ses dimensions <i>AR</i> , en pointillé; le chargement de flambage adimensionnel pour une plaque de longueur infinie 46
Figure 2-2	Structure étudiée par le plan d'expériences..... 49
Figure 2-3	Exemple d'une division du domaine 53
Figure 2-4	Sections déformées du cadre pour les modes de flambage purs (les groupes de nœuds A, B, C et D sont identifiés)..... 54
Figure 2-5	Déformées après flambage des exemples A et B..... 57

Figure 2-6	Régression quadratique en utilisant les erreurs absolues	61
Figure 2-7	Régression quadratique en utilisant les erreurs relatives	61
Figure 2-8	Apparence de l'outil Excel approximatif.....	62
Figure 2-9	Onglet pour la rigidité de l'ensemble peau et raidisseurs.....	63
Figure 2-10	Comparaison des contraintes prédites par l'outil Excel approximatif et obtenues par éléments finis pour les configurations de validation	64
Figure 2-11	Distribution des erreurs obtenues avec les configurations de validation (erreur = (valeur prédite – valeur obtenue par éléments finis) / valeur obtenue par éléments finis).....	65
Figure 2-12	Effet d'un changement de modèle sur les résultats de prédiction de contrainte de flambage latéral d'un cadre métallique	66
Figure 2-13	Structure étudiée : Plaque orthotrope représentant l'âme d'un cadre	67
Figure 2-14	Exemple de déterminant en fonction du chargement (N_x)	72
Figure 2-15	Plaque simplement supportée à $x = 0$ et $x = a$ et encastrée à $y = 0$ et $y = b$	73
Figure 2-16	Section de l'ensemble peau et raidisseurs	77
Figure 2-17	Chargement de flambage en fonction de la largeur de bride avec différentes rigidités (R_R).....	78
Figure 2-18	Chargement de flambage en fonction de la rigidité des ressorts de rotation R_R et de la largeur de bride h (Les valeurs de R_R sont indiquées par des lignes verticales « Min », « Medium » et « Max »)	79
Figure 2-19	Modèle éléments finis du cadre avec ressorts de rotation.....	80
Figure 2-20	Chargement de flambage en fonction de la largeur de bride. Comparaison des résultats obtenus analytiquement et par éléments finis	80
Figure 2-21	Modèle éléments finis pour l'étude préliminaire.....	83
Figure 2-22	Effet du changement de propriétés de matériau isotrope sur la contrainte de flambage normalisée	84
Figure 2-23	Effet du changement de propriété de matériau (E_I) sur la contrainte de flambage normalisée	85

Figure 2-24	Effet du changement de propriété de matériau (E_2) sur la contrainte de flambage normalisée	85
Figure 2-25	Effet du changement de propriété matériau (G_{I2}) sur la contrainte de flambage normalisée	86
Figure 2-26	Effet d'un changement des propriétés du matériau à l'aide d'une interpolation d'un matériau isotrope vers un matériau orthotrope	87
Figure 2-27	Comparaison des déformées pour un fuselage avec et sans courbure, le cadre est chargé en compression longitudinale.....	87
Figure 2-28	Modèle de fuselage pour ressorts de rotation – Incluant l'ensemble peau-raidisateurs.....	89
Figure 2-29	Modèle d'âme de cadre avec ressorts équivalents.....	90
Figure 2-30	Exemple de déformée : rotation du segment observé, longueur de cadre : 30 po, hauteur de l'âme : 4,4 po	91
Figure 2-31	Modèle éléments finis de fuselage avec cadre en compression.....	94
Figure 2-32	Exemple de mode de flambage avec le cas n°9, 12e mode, principalement flambage local dans la peau	96
Figure 2-33	Exemple de mode de flambage avec le cas n°9, 19e mode, principalement latéral mélangé avec local dans la peau	96
Figure 3-1	Section de fuselage incluant un cadre à dimensionner	97
Figure 3-2	Fonctionnement de l'outil de dimensionnement	105

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

Symbole	Unité	Description
σ_x	psi	Contrainte longitudinale dans un laminé
σ_y	psi	Contrainte transversale dans un laminé
σ_z	psi	Contrainte hors-plan dans un laminé
τ_{xy}	psi	Contrainte de cisaillement dans le plan xy du laminé
τ_{xz}	psi	Contrainte de cisaillement hors-plan xz du laminé
τ_{yz}	psi	Contrainte de cisaillement hors-plan yz du laminé
MS	-	Marge de sécurité
ε_L	-	Déformation longitudinale ultime en tension
$\varepsilon_{L'}$	-	Déformation longitudinale ultime en compression
ε_1	-	Déformation longitudinale appliquée
ε_T	-	Déformation transversale ultime en tension
$\varepsilon_{T'}$	-	Déformation transversale ultime en compression
ε_2	-	Déformation transversale appliquée
γ_{LT}	-	Déformation ultime en cisaillement positif
$\gamma_{LT'}$	-	Déformation ultime en cisaillement négatif
γ_{12}	-	Déformation ultime en cisaillement appliquée
σ_L	psi	Contrainte longitudinale ultime en tension
$\sigma_{L'}$	psi	Contrainte longitudinale ultime en compression
σ_1	psi	Contrainte longitudinale appliquée
σ_T	psi	Contrainte transversale ultime en tension
$\sigma_{T'}$	psi	Contrainte transversale ultime en compression
σ_2	psi	Contrainte transversale appliquée
σ_{LT}	psi	Contrainte ultime de cisaillement positif
$\sigma_{LT'}$	psi	Contrainte ultime de cisaillement négatif
σ_{12}	psi	Contrainte de cisaillement appliquée
F_{12}	psi ⁻²	Paramètre d'interaction entre la compression longitudinale et transversale
σ_{f1}	psi	Contrainte longitudinale dans les fibres

E_{f1}	psi	Module de Young des fibres
ν_{f12}	-	Coefficient de Poisson des fibres
$m_{\sigma f}$	-	Facteur d'amplification moyen
$p_{\perp\parallel}^{(-)}, p_{\perp\parallel}^{(+)}, p_{\perp\perp}^{(-)}, p_{\perp\perp}^{(+)}$	-	Propriétés particulières, voir modèle de Puck
$R_{\perp\perp}^A$	psi	Propriété particulière, voir modèle de Puck
τ_c	psi	Propriété particulière, voir modèle de Puck
I_1, I_2, I_3, I_4, I_5	psi	Constantes de chargement
$b_{\perp\parallel}, b_{\perp}^{\tau}, b_{\perp\parallel}^{\tau}$	-	Propriété particulière, voir modèle de Cuntze
a	po	Longueur d'une plaque
b	po	Largeur d'une plaque
t	po	Épaisseur d'une plaque
N_x	lb/po	Chargement linéique longitudinal
N_y	lb/po	Chargement linéique transversal
N_{xy}	lb/po	Chargement linéique de cisaillement
A_{ij}	lb/po ³	Rigidité normal d'un laminé
B_{ij}	lb/po ²	Rigidité d'interaction normal-flexion
D_{ij}	lb/po	Rigidité en flexion d'un laminé
u	po	Déplacement dans la direction x
v	po	Déplacement dans la direction y
w	po	Déplacement dans la direction z , hors-plan
C_{mn}	-	Coefficient d'amplitude pour plaque en compression
m	-	Nombre de demi-sinus de la déformée dans la direction x
n	-	Nombre de demi-sinus de la déformée dans la direction y
AR	-	Ratio des dimensions d'une plaque
N_0	lb/po	Chargement linéique de flambage
k_{TL}	-	Ratio de chargement (transversal sur longitudinal)
$[E]$	lb po	Voir section 1.2.2.2
T_{ij}	po ⁻²	Voir section 1.2.2.2

$N_{x,crit}$	lb/po	Chargement linéique de flambage en compression
$N_{xy,crit}$	lb/po	Chargement linéique de flambage en cisaillement
k_{CL}	-	Ratio de chargement (cisaillement sur longitudinal)
$N_{xy,courte}$	lb/po	Chargement linéique de flambage en cisaillement pour plaque courte
$N_{xy,crit,long}$	lb/po	Chargement linéique de flambage en cisaillement pour plaque longue
$N_{xy,crit,\infty}$	lb/po	Chargement linéique de flambage en cisaillement pour plaque de longueur infinie
C_0	-	Coefficient d'amplitude pour la déformée en cisaillement
α	-	Angle des vagues de la déformée en cisaillement
L_m	po	Longueur des vagues de la déformée en cisaillement
C	-	Coefficient d'amplitude de la déformé pour une plaque avec un côté libre
U_{tot}	lb po	Énergie total dans une plaque déformée
$\sigma_{crippling}$	psi	Contrainte de crippling
σ_{ultime}	psi	Contrainte ultime de rupture matériau
$\sigma_{appliqué}$	psi	Contrainte appliquée
F	lb	Fonction de contrainte d'Airy
f_{mn}	-	Coefficient d'amplitude pour la fonction d'Airy
P_x	lb	Force appliquée dans la direction x
P_y	lb	Force appliquée dans la direction y
P_{xy}	lb	Force appliquée en cisaillement
$(EI)_{cadre}$	lb po ²	Rigidité minimale des cadres pour le flambage global
C_f	-	Coefficient de rigidité minimum des cadres pour le flambage global
M	lb po	Moment appliqué sur le fuselage
D	po	Diamètre du fuselage
L	po	Longueur du fuselage
R	po	Rayon d'une coque cylindrique

u_0	po	Déplacement sur la surface médiane d'une coque dans la direction x
v_0	po	Déplacement sur la surface médiane d'une coque dans la direction y
w_0	po	Déplacement sur la surface médiane d'une coque dans la direction z , hors-plan
ε	-	Déformation dans une coque
$\varepsilon^{(0)}$	-	Déformation à la surface médiane d'une coque
κ	-	Courbure se la surface médiane d'une coque
e_r	po	Distance des centres d'inertie des cadres par rapport à la surface médiane de la coque
e_s	po	Distance des centres d'inertie des raidisseurs par rapport à la surface médiane de la coque
c_1, c_2, c_3	-	Coefficient d'amplitude des déformées en flambage global
U_{sh}	lb po	Énergie de déformation dans une coque cylindrique isotrope
U_{r_i}	lb po	Énergie de déformation d'un cadre numéro i
U_{s_j}	lb po	Énergie de déformation d'un raidisseur numéro j
V_{N_x}	lb po	Travail appliqué sur la coque cylindrique
\bar{N}	lb/po	Chargement de flambage adimensionnel
\bar{N}_{min}	lb/po	Chargement de flambage minimum en fonction d' AR
N_∞	lb/po	Chargement de flambage d'une plaque infinie
d_A, d_B, d_C, d_D	po	Déplacements maximal dans quatre groupes de points
q_L, q_W, q_F, q_S	-	Quantité de chaque mode de flambage pure
$[G]$	po	Matrice de la relation entre les déplacements des groupes de points et les quantités de mode de flambage purs
$G_i, G_j, G_k, G_m, G_n, G_e, G_j$	po	Valeurs de la matrice $[G]$
R_C	-	Paramètre général du critère de sélection du flambage latéral
$R_{C,min}$	-	Paramètre minimum choisi pour le critère de sélection
h	po	Largeur de la bride interne

EA	lb	Rigidité en compression de la bride interne
EI	lb po ²	Rigidité en flexion de la bride interne
GJ	lb po ²	Rigidité en torsion de la bride interne
R_R	lb po/po	Rigidité des ressorts de rotation
R_T	lb po/po	Rigidité des ressorts de torsion
M_x	lb	Moment de flexion appliqué linéique (direction x)
M_y	lb	Moment de flexion appliqué linéique (direction y)
M_{xy}	lb	Moment de torsion appliqué linéique (direction xy)
κ^0	-	Courbure sur la surface médiane de la plaque
$\varphi(y)$	po	Déplacements sur la plaque en fonction de y
C_1, C_2, C_3, C_4	-	Constantes inconnus de l'équation général de la déformée
k_1, k_2	-	Paramètres de l'équation général de la déformée
det_i	lb ³ /po ²	Déterminant de l'équation transcendantal à la borne inférieur de l'espace de recherche
det_s	lb ³ /po ²	Déterminant de l'équation transcendantal à la borne supérieur de l'espace de recherche
det_c	lb ³ /po ²	Déterminant de l'équation transcendantal au centre de l'espace de recherche
$(N_x)_{min}$	lb/po	Chargement à la borne inférieur de l'espace de recherche
w_{cc}	po	Déplacement dans une plaque en compression ayant ses deux côtés non chargés encastres
B	-	Coefficient de l'amplitude de la fonction des déplacements pour la plaque avec deux côtés encastres
V	lb po	Énergie total, plaque à deux côtés encastres
V_B	lb po	Énergie de déformation, plaque à deux côtés encastres
V_L	lb po	Énergie appliquée, plaque à deux côtés encastres
$(N_x)_{max}$	lb/po	Chargement à la borne supérieur de l'espace de recherche
E_{11}	psi	Module de Young dans la direction principale (1) d'un pli

E_{22}	psi	Module de Young dans la direction secondaire (2) d'un pli
ν	-	Coefficient de Poisson
G_{12}	psi	Module de cisaillement dans le plan d'un pli
i, j, k	-	Paramètres décrivant une séquence d'empilement générique
E_x	psi	Module de Young dans la direction x
E_y	psi	Module de Young dans la direction y
E	psi	Module de Young
G	psi	Module de cisaillement
R	po	Rayon du fuselage

INTRODUCTION

Mise en contexte

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie aéronautique en raison de leurs bonnes propriétés spécifiques pouvant mener à des réductions de poids et donc de coûts d'utilisation. Contrairement aux matériaux métalliques qui sont utilisés depuis longtemps, les méthodologies de conception pour les matériaux composites sont encore en développement.

Plusieurs phénomènes peuvent compromettre l'intégrité des structures aéronautiques, dont l'instabilité. Pour la plupart des phénomènes d'instabilité, il existe des formulations analytiques permettant de prédire le chargement ultime. Plusieurs de ces formulations nécessitent cependant d'être modifiées afin d'améliorer leur précision. D'autres formulations analytiques doivent quant à elles être vérifiées et comparées à des simulations numériques ainsi qu'à des essais expérimentaux afin de pouvoir être utilisées en toute confiance. Finalement, pour certains modes de défaillance, les formulations analytiques existantes sont insatisfaisantes ou beaucoup trop conservatrices, ce qui empêche une bonne optimisation des structures. Pour pallier à ce problème, les simulations par éléments finis sont souvent utilisées pour faire l'optimisation finale des structures composites. Ces simulations peuvent être lourdes et requérir un temps de calcul non négligeable. Le développement de formulations analytiques plus précises permettrait une meilleure optimisation des structures de même qu'un temps de conception réduit par rapport aux simulations numériques.

Problématique

La problématique principale se résume à un temps d'optimisation trop long des structures composites aéronautiques et particulièrement des cadres de fuselage. Cela est dû au fait que les formulations mathématiques actuelles permettant de prédire la charge d'instabilité par flambage ne permettent pas une optimisation complète de la structure. De longues simulations par éléments finis sont nécessaires pour compléter l'optimisation. La problématique se divise en trois sous-problèmes :

- Les formulations analytiques existantes sont dispersées à travers la littérature. Il est difficile pour un concepteur d'avoir une vue d'ensemble de la méthodologie de dimensionnement et des formulations à utiliser.
- Certaines formulations analytiques ne sont pas encore évaluées et comparées à des simulations numériques ou à des essais expérimentaux. Connaître la précision d'une formulation est essentiel à son utilisation.
- Pour certains phénomènes de défaillance, les formulations analytiques existantes ne sont pas suffisamment précises ou sont trop conservatrices.

Objectifs

L'objectif est de préparer un ensemble de méthodes analytiques qui seront utilisées par un outil de dimensionnement de cadres de fuselages en matériaux composites. Trois sous-objectifs sont proposés, permettant de répondre aux trois sous-problèmes présentés précédemment.

- Identifier, à l'aide d'une revue de littérature, les différents phénomènes de défaillance s'appliquant à un cadre, rassembler les formulations permettant de prédire les charges ultimes menant à ces différents phénomènes de défaillance et en faire la synthèse.
- Comparer ou évaluer les différentes formulations existantes trouvées dans la littérature à l'aide de simulations par éléments finis. Identifier les formulations qui doivent être améliorées ou choisir la meilleure formulation pour prédire un phénomène particulier.
- Développer de nouvelles formulations pour les phénomènes pour lesquels les formulations existantes sont insatisfaisantes. Les phénomènes de défaillance étant nombreux et complexes, plusieurs opportunités de développement ou d'amélioration sont identifiées pour des projets futurs.

Structure du mémoire

Le premier chapitre présente une revue de littérature sur les formulations analytiques permettant de prédire les charges ultimes menant aux différents phénomènes de défaillance. Les formulations retenues pour faire partie de l'outil de dimensionnement sont ensuite présentées telles qu'utilisées par celui-ci.

Le deuxième chapitre présente les nouvelles formulations et méthodologies développées dans le cadre du présent projet de recherche. Les nouvelles formulations sont développées pour le flambage local et latéral.

Le troisième chapitre présente le fonctionnement de l'outil de dimensionnement dans son ensemble et l'intégration des critères dans celui-ci.

Des suggestions de travaux futurs sont présentées à la fin du mémoire.

CHAPITRE 1

Revue de littérature

Ce chapitre présente une revue de littérature sur les différents modes de défaillance des cadres de fuselage d'avion. Ces modes incluent la rupture matériau (section 1.1) ainsi que plusieurs modes de défaillance par instabilité, soit le flambage local (section 1.2), le crippling (section 1.3), le flambage latéral (section 1.4) et le flambage global (section 1.5).

1.1 Rupture des matériaux composites

Contrairement aux phénomènes d'instabilité, la rupture matériau ne dépend pas des dimensions d'une pièce, mais simplement des contraintes internes et de la résistance du matériau. Pour les matériaux composites, la contrainte ultime, lorsque soumis à un chargement unidirectionnel, est dépendante de la direction de ce chargement puisqu'il s'agit d'un matériau anisotrope.

Il existe une multitude de modèles de rupture de matériaux composites. Une revue de littérature a été faite dans le but de résumer les modèles de rupture les plus populaires et les plus justes, selon les applications. Une sélection a été faite et les modèles les plus pertinents sont présentés.

1.1.1 Comparaison des modèles selon le « WWFE »

Une étude connue sous le nom de « World-Wide Failure Exercise (WWFE) » (Hinton, Kaddour et Soden, 2004) a été conduite dans le but de comparer les différents modèles de rupture des matériaux composites à fibres continues. Cette étude est la plus complète à ce jour concernant les modèles de rupture de matériaux composites. 18 modèles ont été comparés à l'aide de 14 scénarios de test permettant d'évaluer différents types de chargement et d'empilements. Chacun des scénarios de test est composé de plusieurs essais mécaniques

pour un total de 125 essais mécaniques (Tableau 1-1). La colonne « Résultat obtenu » du Tableau 1-1 donne une description de ce qui est observé pour chacun des scénarios. Par exemple, le scénario 1 mesure la contrainte à la rupture pour plusieurs cas de chargement combiné de compression transversale (σ_y) et de cisaillement (τ_{xy}). Le scénario 8, quant à lui, donne la contrainte en fonction de la déformation pour un chargement combiné de compressions transversale et longitudinale en respectant une proportion de deux pour un (compression transversale deux fois plus grande que compression longitudinale). Pour tous les scénarios, la qualité des résultats obtenus pour chaque modèle est représentée par une lettre « A », « B », « C » ou « NA ». Le Tableau 1-2 présente la manière dont une lettre est attribuée à un modèle, selon la précision de la prédiction du chargement de rupture.

Les modèles sont évalués en comptant le nombre de prédictions associées à chaque lettre (Tableau 1-3) et sont classés en ordre décroissant selon la somme de « A » et de « B » obtenus. Pour certains modèles, une version améliorée avait été présentée en plus de la version originale du modèle de rupture. Les deux versions des modèles ont été évaluées et sont présentées au Tableau 1-3. Pour les différencier, les versions originales ont un « -A » ajouté à leur nom et les versions améliorées ont un « -B » ajouté à leur nom.

Tableau 1-1 - Détails des 14 scénarios de test

Scénarios	Empilement	Matériau composite	Résultat obtenu
1	0°	E-glass/LY556 epoxy	Enveloppe : σ_y vs τ_{xy}
2	0°	T300/BSL914C carbon/epoxy	Enveloppe : σ_x vs τ_{xy}
3	0°	E-glass/MY750 epoxy	Enveloppe : σ_y vs σ_x
4	(±30°/90°)	E-glass/LY556 epoxy	Enveloppe : σ_y vs σ_x
5	(±30°/90°)	E-glass/LY556 epoxy	Enveloppe : σ_x vs τ_{xy}
6	(0°/±45°/90°)	AS4/3501-6 carbon/epoxy	Enveloppe : σ_y vs σ_x
7	(0°/±45°/90°)	AS4/3501-6 carbon/epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 1:0$
8	(0°/±45°/90°)	AS4/3501-6 carbon/epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 2:1$
9	±55°	E-glass/MY750 epoxy	Enveloppe : σ_y vs σ_x
10	±55°	E-glass/MY750 epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 1:0$
11	±55°	E-glass/MY750 epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 2:1$
12	(0°/90°)	E-glass/MY750 epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 0:1$
13	±45°	E-glass/MY750 epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 1:1$
14	±45°	E-glass/MY750 epoxy	Contrainte-déformation, $\sigma_y : \sigma_x = 1:-1$

Tableau 1-2 - Classement des qualités de prédiction

Lettre représentant la qualité des prédictions	Précision de la prédiction (% de la valeur expérimentale)
A	±10% ou mieux
B	Entre ±10% et ±50%
C	±50% ou pire
NA	Aucune valeur prédite

Tableau 1-3 - Qualité des prédictions des modèles

Modèles	Nombre de prédictions correspondant à chaque lettre (sur 125)				
	A	B	C	NA	A+B
Cuntze-B	59	38	28	0	97
Zinoviev	53	43	29	0	96
Bogetti	51	44	30	0	95
Puck	64	30	31	0	94
Cuntze-A	62	32	31	0	94
Tsai-B	57	36	32	0	93
Mayes-B	58	33	34	0	91
Tsai-A	50	35	40	0	85
Wolfe-B	53	32	40	0	85
Edge-B	51	34	40	0	85
Sun(L)	52	31	42	0	83
Edge-A	50	32	43	0	82
Huang-A	42	38	45	0	80
Huang-B	43	37	45	0	80
Mayes-A	52	27	46	0	79
Wolfe-A	39	31	55	0	70
Hart-Smith3	39	30	41	15	69
Chamis2	44	24	53	4	68
Rotem	37	30	58	0	67
Hart-Smith1	41	16	23	45	57
Hart-Smith2	36	19	25	45	55
McCartney-B	26	13	19	67	39
Sun(NL)	21	17	21	66	38
Eckold	20	14	48	43	34
McCartney-A	10	4	4	107	14

Parmi les meilleurs modèles se trouve celui de Tsai (Kuraishi, Tsai et Liu, 2002; Liu et Tsai, 1998; Tsai et Wu, 1971) qui est un modèle quadratique prenant en compte l'interaction entre les différentes composantes du chargement appliqué (section 1.1.3.4). Le modèle de Puck (Puck et Schürmann, 2002) et le modèle de Cuntze (Cuntze, 2004; Cuntze et Freund, 2004) décrivent quant à eux la rupture en trois dimensions dans le stratifié (section 1.1.3.5 et 1.1.3.6, respectivement). Ils permettent entre autres de prévoir plusieurs modes de rupture différents dont deux pour les fibres et trois pour la matrice. Le modèle de Bogetti (Bogetti et al., 2004a; 2004b) suit l'approche de déformation maximale (section 1.1.3.1), tandis que le modèle de Zinoviev (Zinoviev et al., 1998) suit l'approche de contrainte maximale (section 1.1.3.2).

1.1.1.1 Prédiction de la rupture d'un pli de composite unidirectionnel

Les scénarios 1, 2 et 3 du Tableau 1-1 permettent d'évaluer la capacité des modèles à prédire la rupture d'un pli de composite unidirectionnel. Les résultats pour ces scénarios de tests montrent que deux modèles se démarquent, soit les modèles de Puck et de Tsai. Cependant, les résultats montrent également qu'on a avantage à combiner les deux modèles pour garder la prédiction la plus conservatrice des deux. En effet, le modèle de Tsai surestime la contrainte à la rupture pour les cas de chargement longitudinal en compression tandis qu'il présente une bonne précision en tension. Les prédictions du modèle de Puck sont quant à elles plus conservatrices dans les cas de compression. De plus, le modèle de Puck performe mieux en présence de cisaillement tout en étant plus conservateur.

1.1.1.2 Prédiction de la rupture finale d'un stratifié

La section 7 du « WWFE » montre que cinq modèles se démarquent dans la prédiction de la rupture finale d'un stratifié, soit les modèles de Puck, Tsai, Bogetti, Zinoviev et Cuntze. Cependant, malgré leur supériorité par rapport aux autres modèles, leurs prédictions de la rupture finale d'un stratifié restent imprécises. En effet, les modèles de Tsai, Bogetti et Zinoviev ont permis de prédire la rupture finale d'un composite avec une précision de plus ou moins 50% dans 75% des scénarios de test. Les modèles de Puck et Cuntze ont permis quant à eux de prédire la rupture finale avec une précision de 50% dans 85% des scénarios de test. Les cas où les modèles ont prédit des valeurs supérieures aux données expérimentales sont les cas de chargement en compression. Bien que les résultats expérimentaux n'aient pas permis de le confirmer, il est possible que la rupture ait été influencée par une instabilité dans les échantillons. L'évaluation des modèles selon leur capacité à prédire la rupture finale d'un stratifié a démontré que les cinq meilleurs modèles donnent des résultats relativement semblables. Parmi ces cinq modèles se trouvent ceux notés précédemment pour la rupture d'un pli de composite unidirectionnel. L'utilisation du modèle de Tsai combiné avec le modèle de Puck ou le modèle de Cuntze semble donc un choix raisonnable pour l'intégration dans l'outil de dimensionnement.

1.1.2 Utilisation dans l'industrie

L'utilisation d'un modèle de rupture de matériaux composites n'est pas seulement fonction de sa précision. En effet, une revue des modèles utilisés en industrie montre que les modèles les plus simples et les plus conservateurs sont souvent privilégiés. C'est ainsi que les modèles de déformation maximale, de contrainte maximale, de Tsai-Hill et de Tsai-Wu (Gibson, 2011; Majak et Hannus, 2003; Tsai et Wu, 1971) sont devenus très populaires. Le Tableau 1-4 montre l'utilisation qui est faite des différents modèles en industrie tel que présenté par Icardi (Icardi, Locatto et Longo, 2007).

Tableau 1-4 - Popularité des modèles en industrie

Modèle de rupture	Utilisation (%)
Déformation maximale	30
Contrainte maximale	23
Tsai-Hill	18
Tsai-Wu	13
Tous les autres	19

Les pourcentages d'utilisation semblent indiquer que les modèles les plus simples sont privilégiés. Par exemple, le modèle de Tsai-Hill est davantage utilisé que celui de Tsai-Wu à cause de sa simplicité. De plus, les modèles les plus utilisés ne prennent pas en compte les cas de chargement combinés même si ceux-ci correspondent le mieux à la réalité.

Quand des modèles trop simples et conservateurs sont utilisés, la structure n'est pas optimisée et est donc plus résistante, et plus lourde, que nécessaire. Dans l'industrie aéronautique, il est important de minimiser le poids de la structure et donc, de choisir des modèles qui donnent des prédictions plus près de la réalité tout en restant légèrement conservateurs.

Dans la section suivante, les quatre modèles de rupture les plus utilisés dans l'industrie selon le Tableau 1-4 sont présentés, de même que les modèles retenus aux sections 1.1.1.1 et 1.1.1.2.

1.1.3 Présentation des modèles retenus

L'outil de dimensionnement renferme plusieurs modèles de rupture matériau. Tous les modèles ne sont pas utilisés simultanément. Il en revient à l'utilisateur de décider quels modèles répondent le mieux à ses besoins. L'utilisation de plusieurs modèles combinés est conseillée. La combinaison suggérée est constituée du modèle de Tsai et du modèle de Puck ou Cuntze. Dans le cas d'une combinaison de plusieurs modèles, la prédiction la plus conservatrice est retenue.

Dans cette section, les modèles retenus après comparaison seront présentés. Les modèles ont tous été reformulés pour exprimer directement la marge de sécurité en fonction des propriétés du matériau composite et des chargements appliqués. Les modèles respectent la convention des axes présentée à la Figure 1-1.

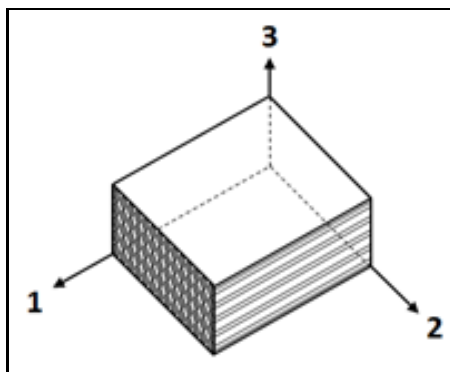


Figure 1-1 - Directions principales dans un pli de stratifié

1.1.3.1 Modèle de déformation maximale

Le modèle de déformation maximale (Gibson, 2011) consiste à vérifier que la déformation imposée au matériau composite ne dépasse pas la déformation maximale permise avant la rupture. Les déformations sont comparées pour chaque direction sans prendre en compte

l'interaction entre les différentes composantes du chargement. Les marges de sécurité (MS) sont calculées ainsi :

$$MS = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_1} - 1 \quad MS = \frac{\varepsilon_{L'}}{\varepsilon_1} - 1 \quad (1-1)$$

$$MS = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_2} - 1 \quad MS = \frac{\varepsilon_{T'}}{\varepsilon_2} - 1 \quad (1-2)$$

$$MS = \frac{\gamma_{LT}}{\gamma_{12}} - 1 \quad MS = \frac{\gamma_{LT'}}{\gamma_{12}} - 1 \quad (1-3)$$

Les déformations appliquées au matériau composite dans la direction 1, dans la direction 2 et en cisaillement sont représentées par ε_1 , ε_2 et γ_{12} , respectivement et les déformations ultimes sont représentées par ε_T , ε_L et ε_{LT} . Les indices L et T signifient longitudinale et transversale et correspondent aux directions 1 et 2 du matériau. Une apostrophe est ajoutée aux indices L , T et LT pour indiquer qu'il s'agit des déformations maximales en compression plutôt qu'en tension.

1.1.3.2 Modèle de contrainte maximale

Le modèle de contrainte maximale (Gibson, 2011) est semblable au modèle de déformation maximale à cette différence près que ce sont les contraintes qui sont comparées plutôt que les déformations. Les marges de sécurité pour le modèle de contrainte maximale sont donc :

$$MS = \frac{\sigma_L}{\sigma_1} - 1 \quad MS = \frac{\sigma_{L'}}{\sigma_1} - 1 \quad (1-4)$$

$$MS = \frac{\sigma_T}{\sigma_2} - 1 \quad MS = \frac{\sigma_{T'}}{\sigma_2} - 1 \quad (1-5)$$

$$MS = \frac{\sigma_{LT}}{\sigma_{12}} - 1 \quad MS = \frac{\sigma_{LT'}}{\sigma_{12}} - 1 \quad (1-6)$$

Les contraintes imposées au matériau composite dans la direction 1, dans la direction 2 et en cisaillement sont représentées par σ_1 , σ_2 et σ_{12} , respectivement et les contraintes ultimes sont représentées par σ_T , σ_L et σ_{LT} , respectivement. Les indices L et T signifient longitudinale et transversale et correspondent aux directions 1 et 2 comme précédemment. Une apostrophe

est également ajoutée aux indices L , T et LT pour indiquer qu'il s'agit de la contrainte ultime en compression plutôt qu'en tension.

1.1.3.3 Modèle de Tsai-Hill

Le modèle de Tsai-Hill (Gibson, 2011; Majak et Hannus, 2003) est relativement simple et prend en compte l'interaction entre les différentes composantes du chargement. Le modèle de Tsai-Hill se décrit par l'équation suivante pour un état plan de contraintes :

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_L^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_L^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_T^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{LT}^2} = e \leq 1 \quad (1-7)$$

Les contraintes ultimes σ_L et σ_T sont remplacées par $\sigma_{L'}$ et $\sigma_{T'}$ lorsque les chargements appliqués sont de la compression. La marge de sécurité associée à ce modèle se calcule ainsi :

$$MS = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \quad (1-8)$$

L'équation de la marge de sécurité est développée en posant un facteur de sécurité appliqué de la même manière sur chaque composante de contrainte dans l'équation du modèle.

1.1.3.4 Modèle de Tsai-Wu

Le modèle de Tsai-Wu pour un état plan de contraintes est présenté par l'équation suivante :

$$\left(\frac{1}{\sigma_L} - \frac{1}{\sigma_{L'}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_T} - \frac{1}{\sigma_{T'}}\right)\sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_L\sigma_{L'}} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_T\sigma_{T'}} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{LT}\sigma_{LT'}} = e \leq 1 \quad (1-9)$$

Le paramètre F_{12} est déterminé expérimentalement par des essais en chargement combiné. Ce paramètre est propre à chaque matériau composite. Certains modèles dérivés à partir du modèle de Tsai-Wu ou semblables à celui-ci font une estimation du paramètre F_{12} :

$$Tsai - Hill \rightarrow F_{12} = -\frac{1}{2\sigma_L^2} \quad (1-10)$$

$$Tsai - Hahn \rightarrow F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{\sigma_L\sigma_{L'}\sigma_T\sigma_{T'}}} \quad (1-11)$$

$$Hoffman \rightarrow F_{12} = -\frac{1}{2\sigma_L\sigma_{L'}} \quad (1-12)$$

La marge de sécurité pour le modèle de Tsai-Wu est calculée de la façon suivante :

$$MS = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2b} - 1 \quad (1-13)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{\sigma_L} - \frac{1}{\sigma_{L'}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_T} - \frac{1}{\sigma_{T'}}\right)\sigma_2 \\ b &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_L\sigma_{L'}} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_T\sigma_{T'}} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{LT}\sigma_{LT'}} \end{aligned} \quad (1-14)$$

1.1.3.5 Modèle de Puck

Le modèle de Puck (Puck et Schürmann, 2002) renferme deux modes de rupture des fibres du matériau composite (tension et compression) ainsi que trois modes de rupture de la matrice. Il tient compte de la différence d'amplitude entre la contrainte ultime en tension et en compression. Pour choisir le mode pertinent, il faut d'abord vérifier si les fibres sont sollicitées en compression ou en tension :

$$\sigma_{f1} = \varepsilon_1 E_{f1} + \nu_{f12} m_{\sigma f} \sigma_2 \quad (1-15)$$

La contrainte dans les fibres est représentée par σ_{f1} . Le module d'Young et le coefficient de Poisson des fibres sont exprimés par E_{f1} et ν_{f12} , respectivement. $m_{\sigma f}$ est un facteur d'amplification moyen (Puck et Schürmann, 2002). Dans le cas des polymères renforcés de fibres de carbone, cette valeur est d'environ 1,1.

La marge de sécurité pour des fibres sollicitées en tension est :

$$\sigma_{f1} \geq 0 \rightarrow e = \frac{E_1}{\sigma_L} \left(\varepsilon_1 + m_{\sigma f} \frac{\sigma_2 \nu_{f12}}{E_{f1}} \right) \quad MS = \frac{1}{e} - 1 \quad (1-16)$$

La marge de sécurité pour des fibres sollicitées en compression est :

$$\sigma_{f1} < 0 \rightarrow \begin{aligned} a &= (10\gamma_{21})^2 \\ b &= \frac{E_1}{-\sigma_{L'}} \left(\varepsilon_1 + m_{\sigma f} \frac{\sigma_2 \nu_{f12}}{E_{f1}} \right) \end{aligned} \quad MS = \frac{\sqrt{4a + b^2} - b}{2a} - 1 \quad (1-17)$$

Pour les modes de rupture de la matrice, certaines propriétés supplémentaires sont nécessaires pour décrire le matériau composite. Dans le cas d'un matériau à base de fibre de carbone et d'époxy, les propriétés sont (Puck et Schürmann, 2002) :

$$p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,3 \quad p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,35 \quad p_{\perp\perp}^{(-)} = 0,25 \text{ à } 0,30 \quad p_{\perp\perp}^{(+)} = 0,25 \text{ à } 0,30$$

D'autres paramètres doivent être préalablement calculés avant de vérifier les modes de rupture de la matrice, soit :

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{\sigma_{LT}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left(\sqrt{1 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{\sigma_{T'}}{\sigma_{LT}}} - 1 \right) \quad (1-18)$$

$$\tau_c = \sigma_{LT} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad (1-19)$$

Les trois modes de rupture de la matrice sont :

$$\begin{aligned} \sigma_2 \geq 0 &\rightarrow e = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{LT}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_T}{\sigma_{LT}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_T}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{\sigma_{LT}} \\ \sigma_2 < 0 \text{ et } \frac{|\sigma_2|}{R_{\perp\perp}^A} \leq \frac{|\sigma_{12}|}{|\tau_c|} &\rightarrow e = \frac{1}{\sigma_{LT}} \left(\sqrt{\sigma_{12}^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right) \\ \sigma_2 < 0 \text{ et } \frac{|\sigma_2|}{R_{\perp\perp}^A} > \frac{|\sigma_{12}|}{|\tau_c|} &\rightarrow e = -\frac{\sigma_{T'}}{\sigma_2} \left[\left(\frac{\sigma_{12}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})\sigma_{LT}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{T'}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1-20)$$

$$MS = \frac{1}{e} - 1$$

1.1.3.6 Modèle de Cuntze

Comme le modèle de Puck, le modèle de Cuntze (Cuntze, 2004; Cuntze et Freund, 2004) renferme cinq modes de rupture, soit deux modes pour les fibres et trois modes pour la matrice. Il considère aussi la différence d'amplitude entre la contrainte ultime en compression et en tension. Avant de calculer les cinq modes de rupture, il faut d'abord calculer des constantes de chargement :

$$I_1 = \sigma_1 \quad (1-21)$$

$$I_2 = \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1-22)$$

$$I_3 = \tau_{31}^2 + \tau_{21}^2 \quad (1-23)$$

$$I_4 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2 \quad (1-24)$$

$$I_5 = (\sigma_2 - \sigma_3)(\tau_{31}^2 - \tau_{21}^2) - 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21} \quad (1-25)$$

Il faut ensuite déterminer expérimentalement quelques propriétés supplémentaires du matériau composite. Ces propriétés sont $b_{\perp\parallel}$, b_{\perp}^{τ} et $b_{\perp\parallel}^{\tau}$ (Cuntze, 2004; Cuntze et Freund, 2004). Elles ont normalement des valeurs se situant dans les intervalles suivants :

$$0,05 < b_{\perp\parallel} < 0,15 \quad 1,0 < b_{\perp}^{\tau} < 1,6 \quad 0 < b_{\perp\parallel}^{\tau} < 0,4 \quad (1-26)$$

Les marges de sécurité pour des fibres sollicitées en tension et en compression sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{f1} \geq 0 \rightarrow e &= \frac{I_1}{\sigma_L} \rightarrow MS = \frac{1}{e} - 1 \\ \sigma_{f1} < 0 \rightarrow e &= \frac{-I_1}{\sigma_{L'}} \end{aligned} \quad (1-27)$$

$$MS = \frac{1}{e} - 1 \leftarrow e = \frac{I_2 + \sqrt{I_4}}{2\sigma_T} \quad (1-28)$$

$$MS = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} - 1 \leftarrow e = \left(\frac{\sqrt{I_3}}{\sigma_{TL}} \right)^3 + b_{\perp\parallel} \frac{I_2 I_3 - I_5}{\sigma_{TL}^3} \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned} MS &= \frac{\sqrt{4b + a^2} - a}{2b} - 1 \leftarrow \begin{aligned} a &= (b_{\perp}^{\tau} - 1) \frac{I_2}{\sigma_{T'}} \\ b &= \frac{b_{\perp}^{\tau} I_4 + b_{\perp\parallel}^{\tau} I_3}{\sigma_{T'}^2} \end{aligned} \end{aligned} \quad (1-30)$$

1.2 Flambage local

Un cadre de fuselage d'avion est idéalisé comme un assemblage de plaques. Par exemple, un cadre en « I » comporte trois plaques, soit une âme et deux brides (voir Figure 1-2). Les termes « bride », « semelle » et « talon » sont tous utilisés dans la littérature. Dans le présent mémoire, c'est le terme « bride » qui a été sélectionné. Le phénomène de flambage local se définit par un déplacement hors plan des plaques alors que les jonctions entre elles ne se

déplacent pas. Ce phénomène est réversible si les déformations restent dans le domaine élastique.

La Figure 1-2 illustre une section de fuselage d'avion comportant la peau, un cadre courbé de profilé en « C » et quelques raidisseurs droits de profilé en « J ». Le cadre illustré est chargé en compression longitudinale et les frontières de la section de fuselage sont simplement supportées. On voit sur la figure que les plaques formant l'âme et la bride du cadre ont subi une déformée associée au mode de flambage local. Cette déformée suit une forme sinusoïdale.

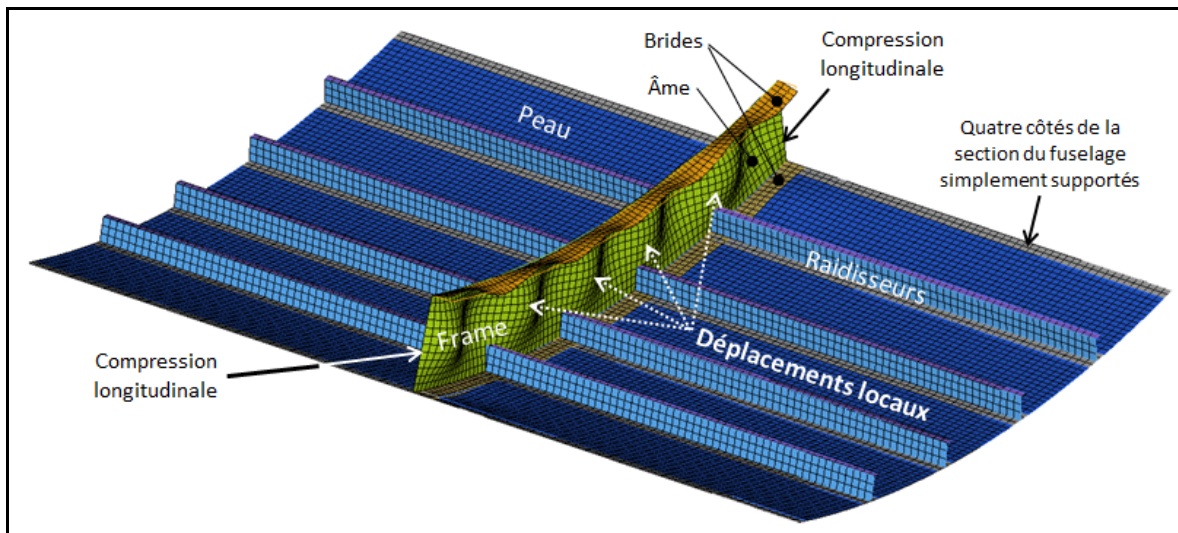


Figure 1-2 - Exemple de déformée causée par le flambage local d'un cadre

La littérature renferme beaucoup de formulations pour la prédiction du flambage local de plaques. Les formulations populaires et conservatrices sont répertoriées, en privilégiant celles comportant des conditions frontières simplement supportées.

Selon la littérature (Barbero, 1999; Bruhn, 1973; Kassapoglou, 2010; Kollar et Springer, 2003; Niu, 1988), le flambage local d'une structure se calcule en divisant celle-ci en plusieurs plaques rectangulaires qui sont évaluées individuellement. Pour l'analyse du flambage local d'un cadre d'avion, on divise celui-ci en plaques rectangulaires correspondant à l'âme et aux

brides. L'âme est souvent définie comme une plaque ayant les quatre côtés simplement supportés (Figure 1-3). La bride quant à elle possède trois côtés qui sont simplement supportés et un côté libre (Figure 1-3).

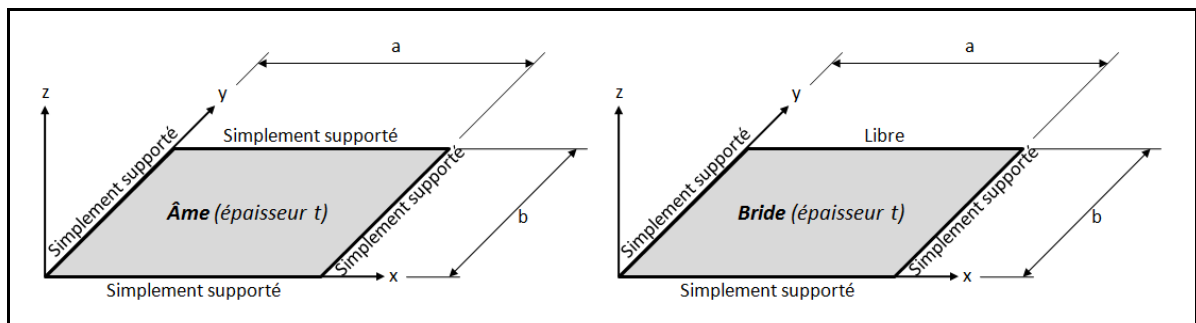


Figure 1-3 - Conditions frontalières d'une âme et d'une bride pour le flambage local

Cette section présente les méthodes de calcul permettant de prédire le flambage local d'un cadre en matériau composite. Plusieurs types de chargements sont considérés et plusieurs formulations sont donc développées, autant pour l'âme que pour la bride. Quelques formulations approximatives sont aussi présentées suivant une approche empirique de même que des formulations pour des plaques de longueur infinie. L'hypothèse que le cadre est infiniment long permet d'être conservateur. Le fait d'avoir une longueur de cadre finie a un effet rigidifiant sur la longueur d'onde de la déformée en flambage. Dans la déformée après flambage, le nombre de demi-sinus doit être entier. Cette limitation donne un peu de rigidité supplémentaire à la plaque. Certains concepteurs préfèrent ne pas tenir compte de cette rigidité supplémentaire et rester conservateur en faisant l'hypothèse que le cadre est infiniment long. Pour cette raison, les formulations pour les plaques infinies seront également présentées dans cette section. L'utilisateur de la méthodologie pourra lui-même faire le choix, s'il le veut, de faire l'hypothèse que le cadre est infini.

Les différents chargements pris en compte sont (Figure 1-4) :

- Compression longitudinale (N_x);
- Compression biaxiale (N_x et N_y);
- Cisaillement pur (N_{xy});

- Chargement combiné (N_x et N_{xy}).

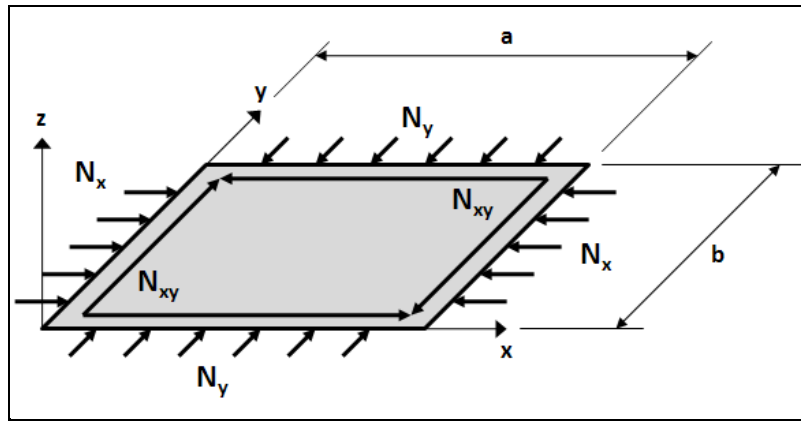


Figure 1-4 - Plaque rectangulaire soumise à différents chargements

Deux combinaisons de conditions frontières sont présentées. Dans le premier cas, tous les côtés sont simplement supportés. Ce cas représente l'âme du cadre qui est simplement supportée par la peau et la bride. Dans le deuxième cas, trois côtés sont simplement supportés et le quatrième côté est libre. Cette condition frontière représente une bride du cadre. Les hypothèses suivantes sont faites pour tous les calculs présentés dans cette section :

- L'état plan de contraintes est considéré. Ainsi, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.
- Le stratifié est symétrique et équilibré. Selon la théorie classique des stratifiés, la matrice B , les termes A_{16} et A_{26} et les termes d'interaction torsion-flexion D_{16} et D_{26} sont donc négligés.
- La courbure du fuselage est négligée.

1.2.1 Théorie commune

Plusieurs des formulations présentées dans cette section utilisent la même théorie de base. Cette théorie commune est présentée avant de passer aux modèles de flambage local.

1.2.1.1 Calcul de marge de sécurité

Plutôt que de calculer le chargement de flambage, l'outil de dimensionnement calcule les marges de sécurité associées au flambage. Les marges de sécurité sont calculées ainsi :

$$MS = \frac{N_{flambage}}{N_{appliqué}} - 1 \quad (1-31)$$

où $N_{flambage}$ et $N_{appliqué}$ représentent le chargement de flambage local et le chargement appliqué, respectivement.

1.2.1.2 Équation de von Karman

L'équation de von Karman est l'équation la plus utilisée pour développer les calculs de flambage. On l'obtient en faisant la somme des forces et des moments appliqués sur un élément infinitésimal d'une plaque composite (Gibson, 2011). Grâce aux hypothèses simplificatrices, on obtient l'équation de von Karman sous la forme suivante :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1-32)$$

1.2.2 Plaque simplement supportée

Plusieurs méthodes de calcul développées à l'aide de l'équation de von Karman (équation (1-32)) sont présentées. Ces méthodes permettent de prédire le chargement de flambage d'une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés et soumise à différents types de chargement.

1.2.2.1 Cas 1 : Chargement en compression longitudinale

Étant donné la complexité des équations décrivant le flambage de plaques en matériaux composites, une hypothèse sur la déformée après flambage est faite (Gibson, 2011;

Kassapoglou, 2010). Pour une plaque simplement supportée soumise à de la compression longitudinale, on suppose que la déformée est représentée par l'équation (1-33) :

$$w = \sum \sum C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-33)$$

Cette équation contient une infinité de termes. Dans le cas d'un chargement en compression, un seul terme à la fois permet d'obtenir des résultats suffisamment proches de la réalité. Chaque terme comporte un coefficient d'amplitude C_{mn} ainsi que les paramètres m et n qui sont les nombres de demi-sinus de la déformée dans la direction x et y , respectivement. On définit le ratio AR des dimensions de la plaque et un chargement de compression en x (N_0) :

$$AR = \frac{a}{b} \quad N_0 = -N_x \quad N_y = N_{xy} = 0 \quad (1-34)$$

En utilisant l'équation de von Karman (équation (1-32)) et celle de la déformée de flambage choisie, l'équation du chargement de flambage peut être développée en isolant N_0 . Il faut également minimiser le chargement de flambage par rapport à m et n pour trouver le mode de flambage le plus probable. Dans le cas de la compression longitudinale selon l'axe des x , n prend la valeur de un. Le chargement de flambage de la plaque simplement supportée en compression longitudinale est ainsi calculé :

$$N_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \left(D_{11}m^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})AR^2 + D_{22} \frac{AR^4}{m^2} \right) \quad (1-35)$$

1.2.2.2 Cas 2 : Chargement en cisaillement

Dans le cas d'un chargement en cisaillement pur :

$$N_x = N_y = 0 \quad (1-36)$$

L'équation (1-33) est encore une fois utilisée. Cependant, dans le cas du cisaillement, il est nécessaire de garder plusieurs termes pour obtenir une précision suffisante (*Kassapoglou*,

2010). Il est normalement nécessaire d'utiliser un solveur pour résoudre le système d'équations. L'objectif est de résoudre l'équation :

$$[E]\{C_{mn}\} = \{0\} \quad (1-37)$$

Une solution valide est obtenue pour :

$$\det[E] = 0 \quad (1-38)$$

Il s'agit d'un problème de valeurs propres. Chaque terme de la matrice $[E]$ est calculé à l'aide de l'équation (1-39) :

$$\begin{aligned} E_{ij} = & -32mnAR^2b^2N_{xy}T_{ij} \\ & + \pi^4[D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2AR^2 + D_{22}n^4AR^4]\delta(m-i)\delta(n-j) \end{aligned} \quad (1-39)$$

La fonction $\delta(x)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } x = 0 & \rightarrow \delta(x) = 1 \\ \text{si } x \neq 0 & \rightarrow \delta(x) = 0 \end{aligned} \quad (1-40)$$

T_{ij} est calculé avec l'équation (1-41) quand $m \neq j$ et $n \neq i$ sont impairs, sinon sa valeur est nulle.

$$T_{ij} = \frac{ij}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} \quad (1-41)$$

Il faut normalement utiliser un algorithme pour bâtir la matrice $[E]$ et ensuite résoudre l'équation à l'aide d'un solveur.

1.2.2.3 Cas 3 : Chargement combiné

Le chargement est ici une combinaison de compression en x et de cisaillement. La méthode la plus efficace et qui donne de très bons résultats sans nécessiter beaucoup de temps de calcul

est de considérer séparément la charge critique en compression pure et en cisaillement pur. Une équation d'interaction est ensuite utilisée pour connaître le chargement de flambage en chargement combiné (*Kassapoglou, 2010*) :

$$\frac{N_x}{N_{x,crit}} + \left(\frac{N_{xy}}{N_{xy,crit}} \right)^2 = 1 \quad (1-42)$$

Le chargement combiné critique dépend du ratio entre les deux chargements. Il faut donc supposer un ratio puis calculer le chargement de flambage. En définissant un chargement de base ($N_0 = -N_x$) et un ratio de chargement ($k_{CL} = N_{xy}/N_x$), on peut calculer le chargement de flambage (*Kassapoglou, 2010*) :

$$N_0 = \frac{N_{xy,crit}}{2k_{CL}^2 N_{x,crit}} \left(\pm \sqrt{N_{xy,crit}^2 - 4k_{CL}^2 N_{x,crit}^2} - N_{xy,crit} \right) \quad (1-43)$$

1.2.3 Plaque simplement supportée chargée en cisaillement pur – Méthode approximative

Cette section présente une méthode approximative développée par Kassapoglou (*Kassapoglou, 2010*) pour prédire le chargement de flambage d'une plaque simplement supportée et chargée en cisaillement pur. Malheureusement, Kassapoglou ne présente pas le développement mathématique de cette formulation. C'est pourquoi l'évaluation de cette formulation avant son utilisation est primordiale. Néanmoins, il est utile d'avoir une formulation approximative car la formulation développée en 1.2.2.2 est implicite et relativement complexe à résoudre. La méthode approximative explicite résulte en des erreurs variant de 1 à 20% selon les paramètres d'entrée (*Kassapoglou, 2010*) mais elle est beaucoup plus simple à utiliser que la formulation présentée à la section 1.2.2.2. Si la plaque est courte, soit un ratio AR variant entre 0,5 et 1, le chargement de flambage est calculé ainsi :

$$D_1 = D_{11} + D_{22} \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (1-44)$$

$$D_2 = D_{11} + 81D_{22} \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 18(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (1-45)$$

$$D_3 = 81D_{11} + D_{22} \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 18(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (1-46)$$

$$N_{xy,courte} = \frac{\pi^4 b}{a^3} \left(\frac{14,28}{D_1^2} + \frac{40,96}{D_1 D_2} + \frac{40,96}{D_1 D_3} \right)^{-1/2} \quad (1-47)$$

Si la plaque est longue, soit un ratio AR variant entre 0 et 0,5, on calcule d'abord le chargement de flambage en supposant $AR = 0,5$, puis on fait une interpolation linéaire entre cette valeur et la valeur obtenue en supposant $AR = 0$. La méthode des plaques infinies est utilisée pour ce dernier cas (section 1.2.4).

$$N_{xy,crit,long} = 2AR(N_{xy,crit,courte} - N_{xy,crit,\infty}) + N_{xy,crit,\infty} \quad (1-48)$$

Il est recommandé d'utiliser la méthode approximative en calcul préliminaire seulement. Elle peut être utilisée en première approximation pour calculer les marges de sécurité pour le flambage local de l'âme du cadre.

1.2.4 Plaque infinie simplement supportée chargée en cisaillement pur

La déformée est définie par l'équation (1-49) (*Kassapoglou, 2010*) :

$$w = C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi(y - x \tan(\alpha))}{L_m}\right) \quad (1-49)$$

La plaque est de longueur infinie dans la direction correspondant à a et L_m représente la largeur d'un demi-sinus dans la direction de a (Figure 1-5). Cette équation donne une déformée semblable à celle de la compression sauf que les ondulations suivent des lignes à angle α par rapport au côté de la plaque.

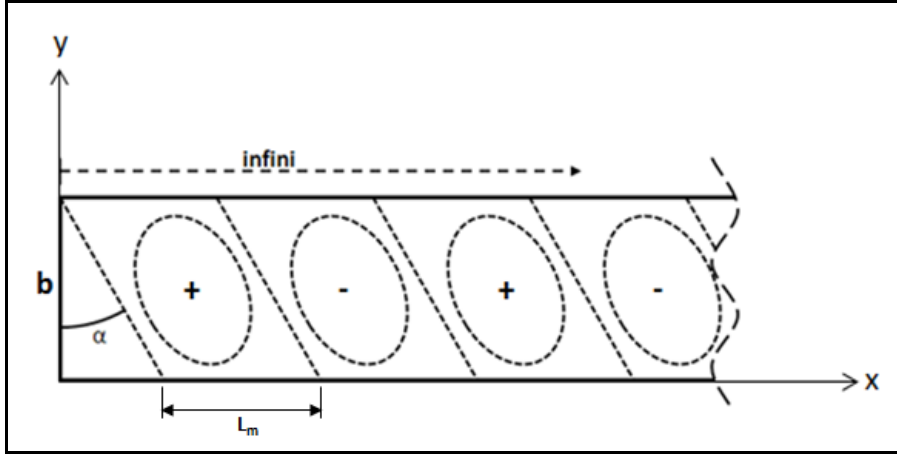


Figure 1-5 - Déformée d'une plaque de longueur infinie chargée en cisaillement. Les ellipses représentent le déplacement hors-plan de la plaque

Comme la dimension a de la plaque est infinie, le ratio AR (précédemment égal à a/b) est calculé en remplaçant la dimension a par la longueur L_m , soit la demie longueur d'onde de la déformée sinusoïdale dans la direction x . Il faut résoudre deux équations simultanément pour trouver le ratio AR et l'angle α :

$$AR = \left(\frac{D_{11}}{D_{11} \tan^4(\alpha) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \tan^2(\alpha) + D_{22}} \right)^{1/4} \quad (1-50)$$

et

$$3D_{11}AR^4 \tan^4(\alpha) + (6D_{11}AR^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})AR^4) \tan^2(\alpha) - (D_{11}2(D_{12} + 2D_{66})AR^2 + D_{22}AR^4) = 0 \quad (1-51)$$

Avec les valeurs trouvées de AR et α , le chargement de flambage en cisaillement pour la plaque de longueur infinie est calculé ainsi :

$$N_{xy,crit,\infty} = \frac{\pi^2}{2AR^2 a^2 \tan(\alpha)} (D_{11}(1 + 6 \tan^2(\alpha) AR^2 + \tan^4(\alpha) AR^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})(AR^2 + AR^4 \tan^2(\alpha)) + D_{22}AR^4) \quad (1-52)$$

1.2.5 Plaque avec un côté libre (bride) chargée en compression longitudinale

Les plaques comportant un côté libre à $y = b$ ne peuvent supporter que la compression longitudinale (N_x) (voir Figure 1-4). La compression est appliquée sur les deux côtés opposés ($x = 0$ et $x = a$) qui sont supportés et adjacents au côté libre. Le côté opposé au côté libre (à $y = 0$) est simplement supporté. La formulation pour un tel cas est connue et disponible à plusieurs endroits dans la littérature (Barbero, 1999; CMH-17, 2012; Kassapoglou, 2010) mais son développement mathématique est rarement présenté (Kollar et Springer, 2003).

L'équation présentée ici est développée avec la méthode de Ritz et elle n'est donc pas exacte. L'erreur associée à cette méthode est toujours conservatrice. Pour développer cette équation, une hypothèse est faite sur la déformée après flambage :

$$w = Cy \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (1-53)$$

où C est une constante qui décrit l'amplitude de la déformée. L'équation (1-54) décrit l'énergie totale (U_{tot}) dans une plaque déformée et chargée en compression longitudinale :

$$U_{tot} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx \quad (1-54)$$

Il y a instabilité dans la plaque lorsque la dérivée de l'énergie totale dans celle-ci par rapport aux variables décrivant la déformée est égale à zéro. Autrement dit, lorsque qu'une petite déformation dans une plaque n'engendre aucune variation d'énergie, cette plaque est instable. Dans notre cas, l'instabilité est obtenue en posant la dérivée de l'énergie totale dans la plaque par rapport à A égale à zéro. On obtient ainsi une équation simplifiée :

$$N_{x,crit} = D_{11} \frac{\pi^2}{a^2} + D_{66} \frac{12}{b^2} \quad (1-55)$$

1.3 Crippling

Lorsqu'il y a flambage local dans un profilé constitué de plaques rectangulaires chargées longitudinalement, l'intérieur des plaques se déplace hors plan, mais les jonctions entre celles-ci restent en place (voir Figure 1-2). Après flambage local, les jonctions entre les plaques du profilé continuent de supporter la charge appliquée qui peut augmenter au-delà de la charge de flambage local sans que le profilé ne subisse de rupture. Cependant, lorsque la charge est trop élevée pour que les jonctions entre les plaques rectangulaires puissent la supporter, le profilé s'effondre. Ce phénomène se nomme « crippling ».

Dans la littérature, deux approches sont utilisées pour tenter de prédire le chargement de crippling d'un profilé : l'approche semi-empirique et l'approche en post-flambage. Les formulations pour le crippling présentées dans la littérature s'appliquent à un profilé droit, comme les raidisseurs. L'objectif est de prédire le crippling pour les cadres, qui sont des profilés courbés. Les formulations pour les profilés droits devront donc être adaptées pour les cadres dans les travaux futurs. Il s'agit donc d'une limitation pour les formulations actuelles.

Le crippling faisant partie du domaine post-flambage, il est possible de calculer les contraintes internes dans la structure flambée et de vérifier son intégrité. Dans le cas d'un matériau composite, il ne suffit pas de comparer la contrainte interne maximale et la contrainte ultime du matériau. Il faut plutôt vérifier chaque mode de rupture possible en tout point. Les analyses non linéaires de flambage par éléments finis permettent de prédire le crippling en post-flambage. Jin-Hwe Kweon a présenté une telle analyse pour le crippling de raidisseurs (Kweon, 2002). Il utilise des éléments à neuf nœuds pour représenter les stratifiés des raidisseurs. Dans ses analyses, la rigidité de la structure se dégrade progressivement lorsque le chargement appliqué est augmenté au-delà de la charge causant le flambage local. Ces analyses par éléments finis ont été comparées à des essais expérimentaux et les erreurs entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux se situent entre 0% et 10%. Dans les travaux futurs, cette méthode devrait être testée sur des cadres comportant un rayon de courbure.

Même si les simulations par éléments finis permettent d'obtenir de bonnes prédictions pour le crippling, elles comportent un temps de calcul non négligeable par rapport à une méthode analytique. Des formulations analytiques ont donc été développées pour prédire la charge causant le crippling sur des cadres faits de matériaux composites. Ces formulations comportent cependant des hypothèses simplificatrices. Levend Parnas présente une formulation analytique relativement simple pour le crippling (Parnas et al., 1995). Il considère un chargement longitudinal sur l'âme d'un raidisseur en matériau composite pour lequel tous les côtés de l'âme sont simplement supportés. La formulation s'applique donc à une plaque rectangulaire chargée en compression ayant les quatre côtés simplement supportés. Il développe la formulation pour le flambage local et dérive ensuite une équation de la rigidité de l'âme du raidisseur après flambage. Le chargement de crippling peut ensuite être calculé. Walker a développé une formulation semblable (Walker, 1998). Il a observé que les brides ne supportent presque aucune charge en compression et par conséquent, il les a négligées. Il observe également que les conditions frontières en post-flambage ont un effet négligeable sur le chargement de crippling. Les résultats obtenus avec sa méthode analytique sont en accord avec les essais expérimentaux.

Christos Kassapoglou donne un exemple de développement mathématique permettant de calculer les déplacements et les contraintes en post-flambage dans une plaque carrée chargée en compression longitudinale (Kassapoglou, 2010), ce qui peut être utilisé pour le crippling. Pour ce faire, il utilise les deux équations de grandes déformations de Von Karman (équation (1-62) et (1-63)) ainsi que la fonction de contrainte de Airy pour décrire les contraintes dans la plaque. Sa formulation pourrait être utilisée pour construire une méthode de prédiction du crippling. Par contre, cette méthode devra également être comparée à des simulations par éléments finis pour vérifier sa précision. Kassapoglou présente également des formulations empiriques pour le crippling. Il présente des formulations pour une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés et pour une plaque comportant un côté libre, représentant une âme et une bride, respectivement. Pour les deux cas de conditions frontières, il considère un chargement longitudinal. Ces formulations seront présentées plus en détail à la section

1.3.1.1. Elles ont une forme semblable à l'équation (1-56), dans laquelle les constantes C_{c1} et C_{c2} sont obtenues empiriquement.

$$\frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} = C_{c1} \left(\frac{b}{t} \right)^{C_{c2}} \quad (1-56)$$

Cette formulation est très simple et ne tient pas compte des différents modes de rupture d'un matériau composite.

1.3.1 Formulations retenues

Les formulations présentées ici pour le chargement de crippling en compression longitudinale sont celles utilisées par l'outil de dimensionnement. Les formulations empiriques ont été choisies comme première méthode de calcul à cause de leur simplicité. Les marges de sécurité sont calculées grâce à l'équation (1-57) :

$$MS = \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{appliqué}} - 1 \quad (1-57)$$

où $\sigma_{crippling}$ et $\sigma_{appliqué}$ représentent la contrainte causant le crippling et la contrainte appliquée, respectivement.

1.3.1.1 Formulations empiriques

Pour le cas d'un chargement longitudinal, Kassapoglou présente des formulations empiriques correspondant à deux ensembles de conditions frontières (Kassapoglou, 2010). La première concerne une plaque avec un côté libre et tous les autres côtés simplement supportés. La deuxième formulation concerne une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés.

Plaque avec un côté libre

Pour la plaque comportant un côté libre, deux versions de la formulation sont disponibles (équations (1-58) et (1-59)) :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 2,151 \left(\frac{b}{t}\right)^{-0,717} && \text{pour } b \geq 2,91t \\ \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 1 && \text{pour } b < 2,91t \end{aligned} \quad (1-58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 1,63 \left(\frac{b}{t}\right)^{-0,717} && \text{pour } b \geq 1,98t \\ \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 1 && \text{pour } b < 1,98t \end{aligned} \quad (1-59)$$

$\sigma_{crippling}$ et σ_{ultime} sont les contraintes de crippling et de rupture matériau, respectivement et b et t représentent la largeur et l'épaisseur de la plaque (Figure 1-3). L'équation (1-59) se distingue de l'équation (1-58) en ce qu'elle permet d'avoir des prédictions qui sont conservatrices dans 90% des cas.

Plaque sans côté libre

Les équations (1-60) et (1-61) permettent de prédire le chargement de crippling pour une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés. Encore une fois, l'équation (1-59) se distingue de l'équation (1-61) en ce qu'elle permet d'avoir des prédictions qui sont conservatrices dans 90% des cas.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 14,92 \left(\frac{b}{t}\right)^{-1,124} && \text{pour } b \geq 11,07t \\ \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 1 && \text{pour } b < 11,07t \end{aligned} \quad (1-60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 11,0 \left(\frac{b}{t}\right)^{-1,124} && \text{pour } b \geq 8,443t \\ \frac{\sigma_{crippling}}{\sigma_{ultime}} &= 1 && \text{pour } b < 8,443t \end{aligned} \quad (1-61)$$

1.3.1.2 Formulations post-flambage

Les équations de Von Karman décrivant une plaque en grands déplacements sont (Kassapoglou, 2010) :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_x \frac{\partial w}{\partial x} - p_y \frac{\partial w}{\partial y} + p_z$$
(1-62)

$$\frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \left(A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (A_{22} - A_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right.$$

$$\left. + (A_{11} - A_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
(1-63)

Les équations (1-64) et (1-65) représentent la forme générale de la déformée $w(x, y)$ et des contraintes (F) dans une plaque rectangulaire simplement supportée après flambage (Kassapoglou, 2010) :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(1-64)

$$F = -\frac{P_x y^2}{2bt} - \frac{P_y x^2}{2at} - \frac{P_{xy} xy}{t} + \sum_{m=0}^{2M} \sum_{n=0}^{2N} f_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(1-65)

Les coefficients A_{mn} et f_{mn} sont inconnus et P_x , P_y et P_{xy} sont les forces appliquées sur la plaque. En substituant (1-64) et (1-65) dans (1-68) et (1-69), les inconnues sont trouvées. Cela permet de connaître la déformée $w(x, y)$ et la fonction de contrainte F . Kassapoglou donne un exemple de ce développement mathématique pour une plaque carrée chargée en compression longitudinale (Kassapoglou, 2010). En connaissant l'état de contrainte dans la plaque en tout point, il devient relativement facile de vérifier la rupture matériau en post-flambage et d'ainsi vérifier le critère de crippling.

1.4 Flambage latéral

La bride interne d'un cadre en « C », soit la bride qui n'est pas attachée au fuselage (Figure 1-6), supporte le côté de l'âme auquel elle s'attache en lui apportant une rigidité supplémentaire pour résister aux déplacements latéraux. Lorsque la bride n'est pas

suffisamment rigide pour remplir cette fonction, on obtient un mode de flambage caractérisé par un déplacement latéral de la bride, soit du flambage latéral.

La Figure 1-6 illustre une section de fuselage comportant un cadre courbé de profilé en « C », la peau et quelques raidisseurs droits de profilé en « J ». Le cadre est chargé en compression longitudinale et les côtés de la section de fuselage sont simplement supportés. Un exemple de déformée de flambage latéral est montrée pour le cadre du fuselage.

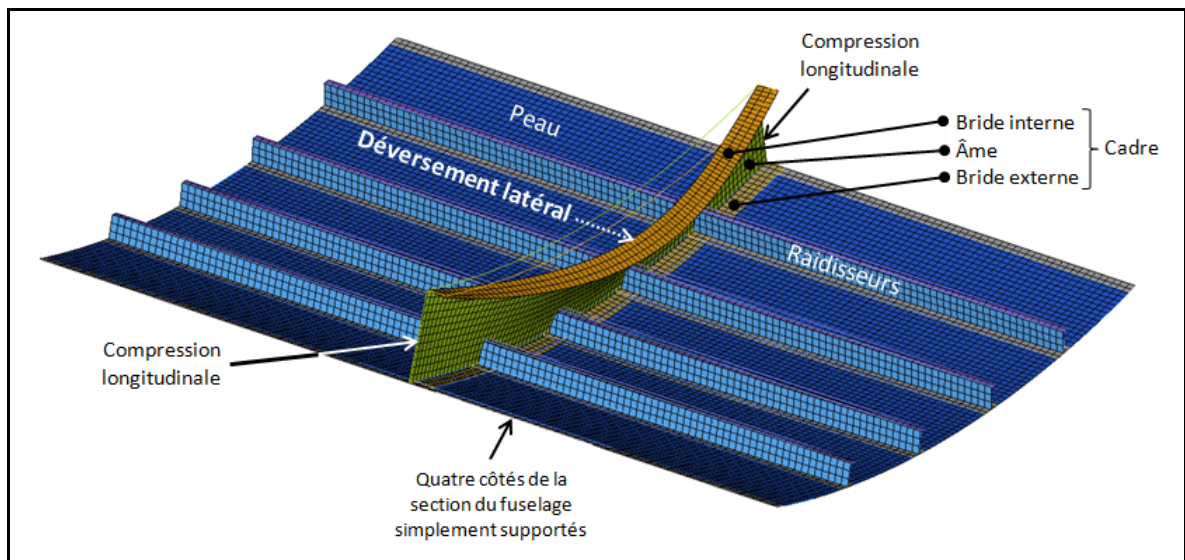


Figure 1-6 - Exemple de déformée causée par le flambage latéral d'un cadre

Trois approches existent dans la littérature pour prédire le flambage latéral d'un cadre, soit l'approche des poutres sur support élastique, l'approche des plaques et l'approche des poutres en torsion.

1.4.1 Approche des poutres sur support élastique

La majorité des formulations pour le flambage latéral sont fondées sur la théorie des poutres sur support élastique et sont développées initialement pour les matériaux métalliques (Niu, 1988; Timoshenko, 1961). Dans le cas d'un cadre, la bride est considérée comme une poutre sur support élastique, lui-même constitué de l'âme du cadre, des raidisseurs et de la peau du

fuselage (Figure 1-7). Les formulations pour le flambage latéral des matériaux composites étant rares, les formulations pour les matériaux métalliques doivent être adaptées aux matériaux composites (Kollar et Springer, 2003). Par ailleurs, au défi posé par la complexité des matériaux composites s'ajoute celui de la courbure des cadres due au rayon du fuselage.

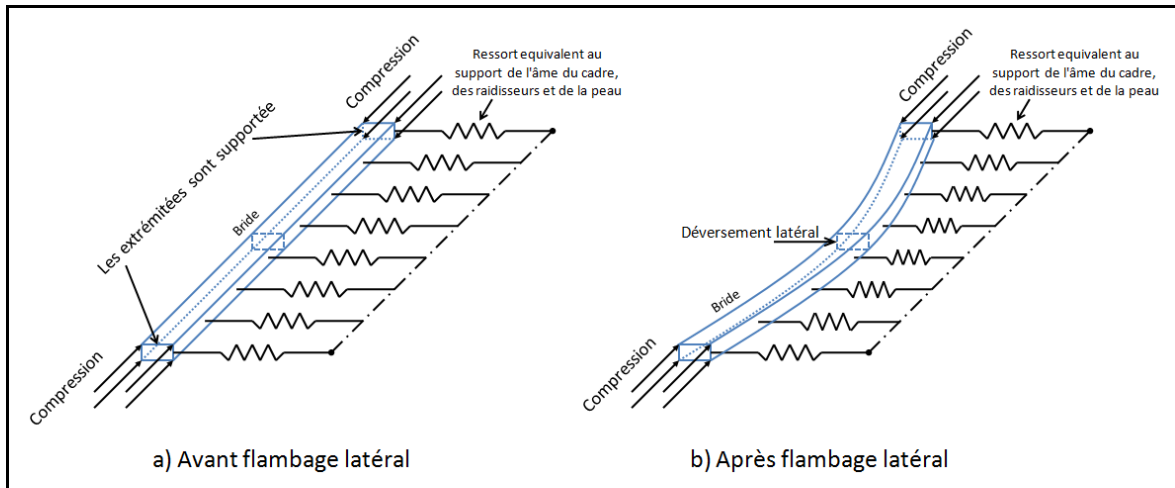


Figure 1-7 - Modèle simplifié suivant l'approche des poutres sur support élastique

1.4.2 Approche des plaques

La théorie du flambage local des plaques peut être utilisée pour prédire le flambage latéral des cadres. L'élément principal à analyser par cette approche est l'âme du cadre et la bride devient alors une condition frontière pour l'âme pouvant se comparer à un support simple dans le cas où la bride est suffisamment rigide. Par contre, si la rigidité de la bride est trop faible, elle ne fournit pas de support simple, mais plutôt une rigidité additionnelle sur le côté de l'âme où elle est attachée. La peau et les raidisseurs fournissent également un support à l'âme sur le côté opposé à la bride (Figure 1-8). Dans la littérature, ce dernier côté est presque toujours considéré comme étant simplement supporté. Évidemment, dans la réalité, cette condition frontière se situe quelque part entre un support simple et un encastrement et peut être modélisé en tant que support simple avec des ressorts en rotation. Plus la rigidité des ressorts est grande, plus le support se rapproche d'un encastrement. Encore une fois, le défi

principal avec une telle approche est d'inclure l'effet du rayon dans les calculs du flambage latéral.

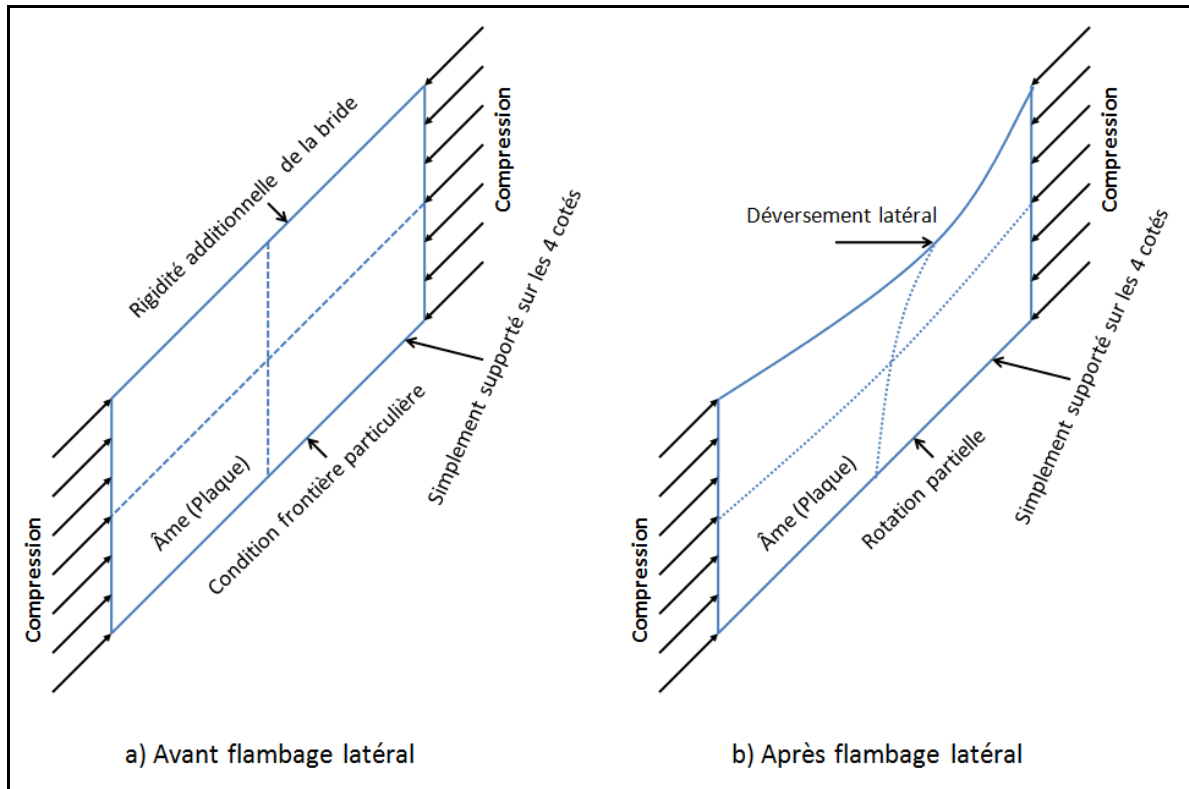


Figure 1-8 - Modèle suivant l'approche des plaques

L'approche des plaques permet de décrire le flambage dans l'âme avec plus de précision que l'approche des poutres sur support élastique. Elle permet de décrire le flambage latéral du cadre, le flambage local dans l'âme de même qu'une combinaison de flambage latéral et local dans l'âme. Dans la majorité des cas, le flambage latéral ne survient pas seul et l'approche des plaques permet de tenir compte de l'interaction entre le flambage local dans l'âme et le flambage latéral de l'âme et de la bride. C'est un avantage important, car cette interaction a un impact considérable sur le flambage latéral, comme le démontreront les simulations par élément finis de la section 2.2.1.1.

Les premiers travaux sur le flambage local des plaques ont commencé il y a plus d'un siècle (Bryan, 1890) et quelques auteurs ont publié des revues de littérature sur ce sujet (Leissa,

1987; Turvey et Marshall, 1995). Plusieurs travaux portent sur l'analyse par plaques (Kollar, 2003; Qiao, Davalos et Wang, 2001; Qiao et Shan, 2005; Tarjan, Sapkas et Kollar, 2010) où une poutre est divisée en plaques qui sont analysées individuellement. Les plaques possèdent des conditions frontières représentées par des ressorts en rotation sur les côtés qui coïncident avec d'autres plaques.

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une plaque possédant un côté renforcé d'une bride et un côté comportant des ressorts en rotation représentant la peau et les raidisseurs (voir Figure 1-9) (Weigraeber, Mittelstedt et Becker, 2012).

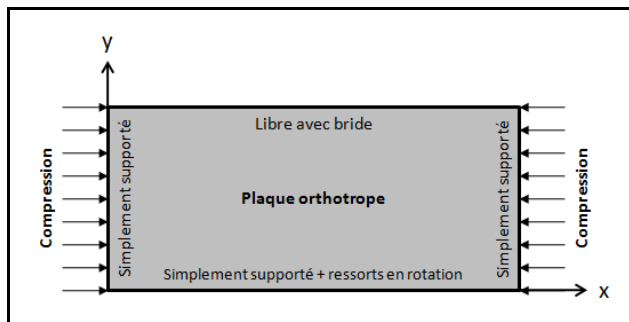


Figure 1-9 - Modèle d'une plaque représentant l'âme du cadre pour le flambage latéral

La littérature présente deux cas pour lesquels les conditions frontières sont semblables à celles de la Figure 1-9. Le premier concerne une plaque simplement supportée avec un côté libre et des ressorts en rotation sur le côté opposé au côté libre (Figure 1-10 a)) (Bank et Jiansheng, 1996; Banks et Rhodes, 1983; Barbero et Raftoyiannis, 1993). Le deuxième concerne une plaque simplement supportée avec un côté libre renforcé d'une bride (Figure 1-10 b)) (Mittelstedt et Schagerl, 2010; Windenburg, 1938). Dans les deux cas, la plaque est chargée en compression dans la direction parallèle au côté libre (Figure 1-10).

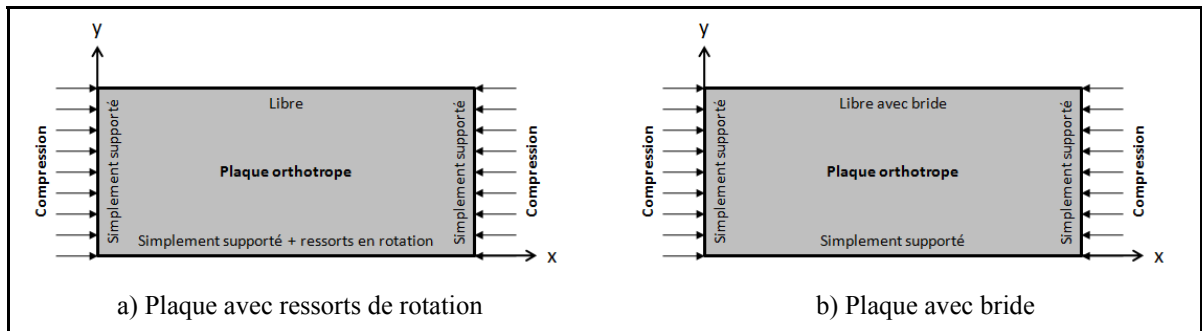


Figure 1-10 - Deux modèles de plaques avec des conditions frontières semblables au cadre

Des formulations approximatives et explicites sont aussi présentées à travers la littérature pour des cas similaires à la Figure 1-10 (Kollar, 2002; Qiao et Zou, 2003; Shan et Qiao, 2008; Tarjan et Kollar, 2010). Ces formulations ne correspondent pas exactement au cas de la Figure 1-9 mais elles sont similaires et elles pourraient être utilisées pour développer une nouvelle formulation approximative.

1.4.3 Approche des poutres en torsion

Une troisième approche, non considérée dans le présent projet de recherche, consiste à utiliser la théorie des poutres sur l'ensemble du cadre plutôt que sur la bride seulement. Comme illustré à la Figure 1-11, la section du cadre garde alors sa forme après flambage latéral car les déplacements de la jonction entre l'âme et la bride externe sont bloqués. L'âme du cadre se déforme en torsion uniquement. Il n'y a aucune flexion dans celle-ci et c'est pour cette raison que cette méthode est considérée, à priori, comme celle qui représente le moins bien le flambage latéral. De plus, même s'il existe relativement beaucoup d'articles décrivant cette approche (Kollar et Springer, 2003; Machado et Cortinez, 2005; Sapkas et Kollar, 2002), peu d'entre eux décrivent le chargement en compression longitudinale.

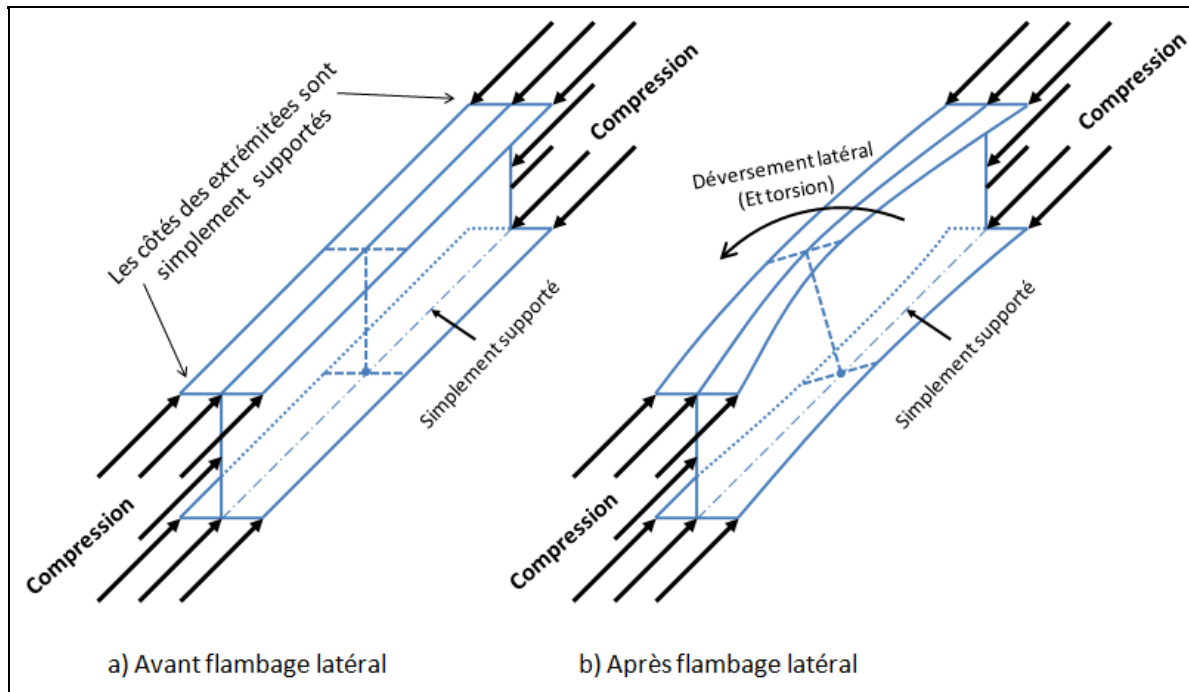


Figure 1-11 - Modèle suivant l'approche des poutres en torsion

1.4.4 Sélection d'une approche

La revue de littérature a permis de comparer les différentes approches possibles pour prédire le flambage latéral des cadres. Aux meilleurs des connaissances de l'auteur, aucune étude comparative de ces méthodes n'a été publiée. L'approche la plus populaire dans la littérature est l'approche des poutres sur support élastique. C'est également une approche relativement simple, mais peu réaliste. L'approche des poutres sur support élastique suppose du flambage latéral pur, ce qui est rarement le cas. L'approche des plaques permet de mieux tenir compte des déformations dans l'âme du cadre et d'inclure du flambage local dans la déformée de flambage latéral. Les résultats obtenus en utilisant l'approche des plaques ont montré que cette approche est relativement précise. C'est cette approche qui a été utilisée pour être intégrée dans l'outil de dimensionnement des cadres.

1.5 Flambage global

Le flambage global est un mode de défaillance qui s'applique à l'ensemble du fuselage. Lorsqu'il survient, le fuselage flambe et les cadres se déforment, car ils n'ont pas suffisamment de rigidité pour maintenir la forme cylindrique du fuselage. Dans le cas contraire, s'ils sont suffisamment rigides, le flambage se produit entre les cadres plutôt qu'à travers ceux-ci. La Figure 1-12 présente un exemple de déformée de flambage global.

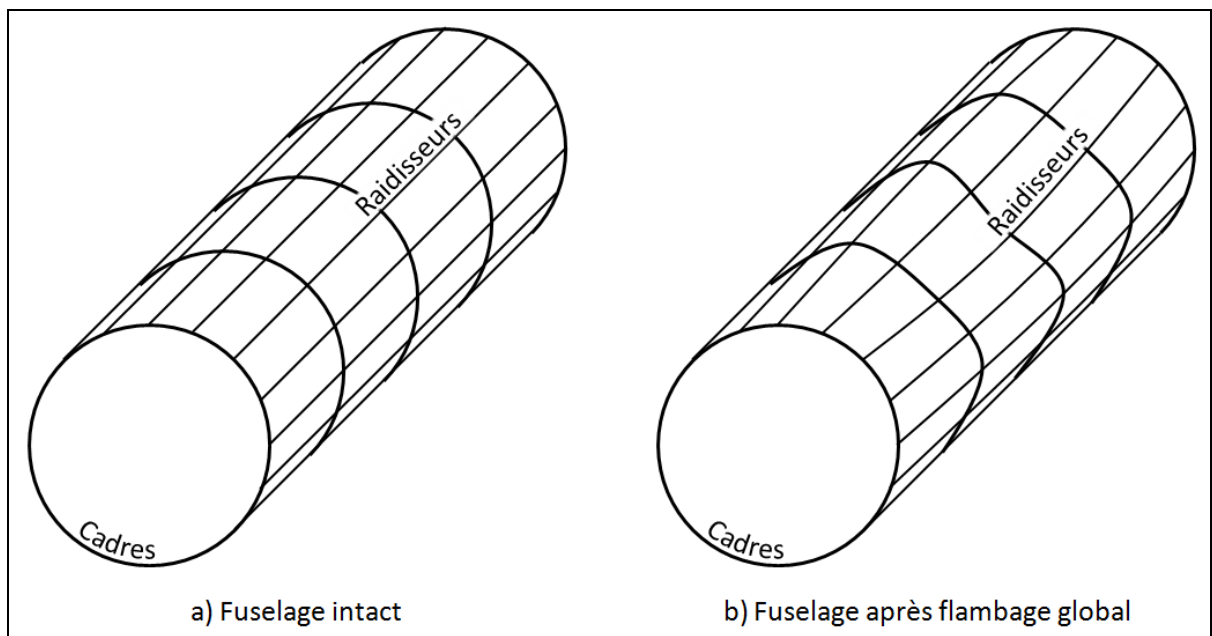


Figure 1-12 - Exemple de déformée causée par le flambage global sur un fuselage

Shanley (Bruhn, 1973; Shanley, 1949) a développé une équation permettant de calculer la rigidité minimale des cadres $(EI)_{cadre}$ pour prévenir le flambage global. En effet, lorsque les cadres sont suffisamment rigides, le flambage global n'est pas le premier mode de flambage à survenir. On obtient plutôt du flambage de panneaux (peau et raidisseurs) entre les cadres. La formulation de Shanley a été couramment utilisée à travers la littérature et elle est encore utilisée aujourd'hui, notamment à cause de sa simplicité. L'équation (1-66) présente cette formulation pour un tube en aluminium, de diamètre D et de longueur L , soumis à un chargement en flexion pure (M).

$$(EI)_{cadre} = C_f \frac{MD^2}{L} \quad (1-66)$$

À l'aide de plusieurs essais expérimentaux sur des cylindres ayant des diamètres de 20 et de 32 po, le coefficient C_f a été évalué à 1/16000 (Shanley, 1949). Même si la formulation a été développée pour des tubes en aluminium, il est mathématiquement possible de l'appliquer directement à un fuselage en matériau composite. En effet, on pourrait calculer la rigidité en flexion d'un cadre en matériau composite et la comparer à la rigidité minimale des cadres $(EI)_{cadre}$. Cependant, il serait nécessaire d'évaluer la constante C_f pour des fuselages d'avion en matériau composite et de comparer les résultats d'une telle approche avec des simulations par éléments finis pour évaluer sa précision.

Herbert Becker a présenté l'état de l'art du flambage global en 1958 (Becker, 1958). Les formulations présentées ne sont pas développées pour les matériaux composites, mais bien pour les matériaux métalliques. Cependant, il présente des formulations analytiques pour différents types de chargement, soit la flexion, la compression longitudinale, la torsion, la pressurisation et plusieurs combinaisons de ces chargements. Il présente les formulations pertinentes de la littérature, tente d'améliorer certaines d'entre elles et en propose de nouvelles. Parmi les plus importantes trouvées dans la littérature, la formulation de Taylor (Taylor, 1936) pour le flambage global d'une coque cylindrique (sans raidisseurs et cadres) sous chargement longitudinal est présentée et améliorée pour inclure la présence de raidisseurs et de cadres. De plus, la formulation de Hoff (Hoff, 1944) permet de calculer le chargement de flambage global d'une coque cylindrique avec raidisseurs et cadres soumis à un chargement en flexion. Le travail de Becker présente beaucoup de formulations analytiques, mais celles-ci doivent être évaluées et comparées à des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux pour être utilisables. De plus, elles devraient être modifiées pour tenir compte des propriétés des matériaux composites. De telles formulations pour les matériaux composites permettraient de tenir compte de plus de cas de chargement que le permet la formulation de Shanley.

David L. Block (Block, 1966) présente une nouvelle formulation pour calculer le chargement de flambage global d'une coque cylindrique avec raidisseurs et cadres. Dans cette nouvelle formulation, l'excentricité des raidisseurs et des cadres est prise en compte, c'est-à-dire qu'il ne suppose pas que les raidisseurs et les cadres sont symétriques par rapport à la coque, comme c'est habituellement le cas. Il prend en compte le fait que les raidisseurs et le cadre sont à l'intérieur ou à l'extérieur de la coque cylindrique (Figure 1-13). Il considère également que la coque cylindrique est chargée en compression, en flexion ou sous une combinaison de ces deux chargements. Il trace la courbe d'interaction entre les chargements. Il utilise la méthode de Galerkin pour développer la nouvelle formulation. Cette formulation est relativement complexe et elle doit être résolue numériquement. Malheureusement, il ne présente que des résultats théoriques. Des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux devraient être faits avant d'utiliser une telle formulation analytique.

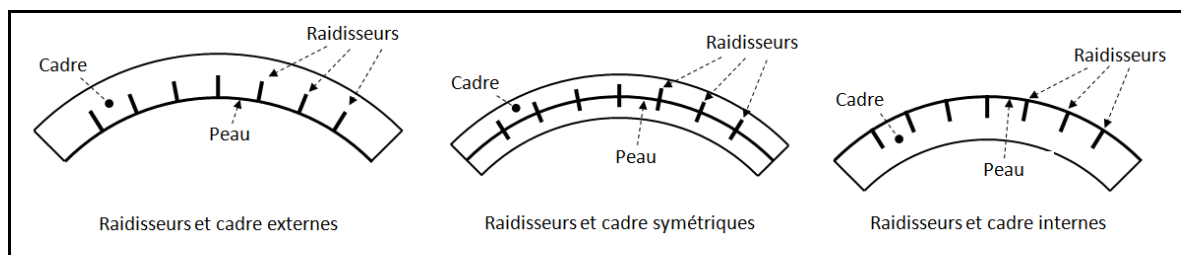


Figure 1-13 Positions des raidisseurs et du cadre par rapport à la peau

Finalement, Sadeghifar a présenté une formulation développée avec la méthode de Rayleigh–Ritz pour calculer le chargement de flambage global d'une coque cylindrique avec raidisseurs et cadres métalliques (Sadeghifar, Bagheri et Jafari, 2010). Cette méthode est présentée à la l'Annexe VI. Celle-ci présente également comment adapter cette formulation aux matériaux composites. Une fois adaptée, cette formulation serait probablement la plus précise car c'est elle qui négligeraient le moins de phénomènes et qui serait donc, théoriquement, la plus proche de la réalité.

1.6 Synthèse de la revue de littérature

Rupture des matériaux composites

L'étude du WWFE (Hinton, Kaddour et Soden, 2004) a permis d'identifier les modèles de rupture les plus précis en les comparant à des essais expérimentaux. Chaque modèle a ses forces et ses faiblesses. Ainsi, il est préférable de combiner plusieurs modèles et de garder la prédiction la plus conservatrice. La combinaison la plus précise est constituée des modèles de Tsai (Kuraishi, Tsai et Liu, 2002; Liu et Tsai, 1998; Tsai et Wu, 1971) et Puck (Puck et Schürmann, 2002). Une deuxième combinaison possible donnant des résultats semblables est constituée des modèles de Tsai et Cuntze (Cuntze, 2004; Cuntze et Freund, 2004). D'un autre côté, les modèles les plus populaires dans l'industrie sont, du plus populaire au moins populaire, les modèles de déformation maximale (Bogetti et al., 2004a; 2004b), contrainte maximale (Zinoviev et al., 1998), Tsai-Hill (Gibson, 2011; Majak et Hannus, 2003), Tsai-Wu, Puck et Cuntze. En tenant compte leur précision et de leur popularité, les modèles retenus et leur précision sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 1-5 - Synthèse des modèles de rupture des matériaux composites retenus

Modèles	Proportion (%) des résultats ayant une précision de ...	
	+/- 10 %	+/- 50 %
Déformation max, Bogetti	40,8%	76,0%
Contrainte max, Zinoviev	42,4%	76,8%
Tsai-Hill	Aucun résultat	Aucun résultat
Tsai-Wu	45,6%	74,4%
Puck	51,2%	75,2%
Cuntze	47,2%	77,6%

Flambage local

Pour le flambage local, plusieurs formulations ont été trouvées dans la littérature (Barbero, 1999; Gibson, 2011; Kassapoglou, 2010; MIL-HDBK-17-3F, 2002). Ces formulations concernent une des trois structures suivantes :

1. Plaque rectangulaire simplement supportée (âme finie);
2. Plaque infinie simplement supportée (âme infinie);
3. Plaque simplement supportée avec un côté libre (bride finie).

Dans le cas de la plaque rectangulaire simplement supportée, les formulations trouvées concernent les chargements de compression longitudinale, de cisaillement et la combinaison de ces deux chargements. Dans les deux autres cas (plaque infinie et plaque simplement supportée avec un côté libre), seul le cas de chargement longitudinal a été trouvé dans la littérature. Les formulations trouvées devront être comparées à des simulations par éléments finis puis d'autres formulations devront être développées pour couvrir les cas de chargement non traités.

Crippling

Dans le cas du crippling, deux approches sont relevées dans la littérature (Kassapoglou, 2010; Kweon, 2002; Parnas et al., 1995; Walker, 1998), soit l'approche empirique et l'approche en post-flambage. Les formulations empiriques sont présentées sous deux formes, la première menant à des prédictions nominales et la deuxième menant à des prédictions conservatrices dans 90% des cas. On peut observer que la deuxième équation consiste en fait à une réduction d'environ 25 % de la prédiction nominale. La formulation en post-flambage est présentée mais elle n'est pas comparée à des simulations par éléments finis.

Flambage latéral

Pour le flambage latéral, trois approches sont possibles :

1. L'approche des poutres sur support élastique;
2. L'approche des plaques;
3. L'approche des poutres en torsion.

L'approche la plus réaliste est celle des plaques puisqu'elle permet de décrire la déformée du cadre lorsqu'il y a flambage latéral combiné à du flambage local, ce qui est majoritairement le cas. Cette approche est donc choisie pour le critère du flambage latéral. Elle sera développée davantage dans le chapitre deux pour prendre en compte l'effet de courbure du fuselage.

Flambage global

Toutes les formulations trouvées pour le flambage global concernent un fuselage métallique. La formulation la plus connue est celle de Shanley (Bruhn, 1973; Shanley, 1949), soit une formulation empirique ne considérant que le chargement en flexion. D'autres formulations, présentées par Herbert Becker (Becker, 1958), tiennent compte des autres chargements possibles, soit la compression longitudinale, la torsion, la pressurisation et plusieurs combinaisons de ces chargements. Finalement, les auteurs David L. Block (Block, 1966) et Sadeghifar (Sadeghifar, Bagheri et Jafari, 2010) présentent des formulations analytiques prometteuses qui devraient être adaptées aux matériaux composites dans les travaux futurs (voir Annexe VI).

CHAPITRE 2

Formulations et méthodologies développées

La revue de littérature présentée au premier chapitre a permis d'identifier les lacunes dans le dimensionnement de cadres en matériaux composites. Certains critères de dimensionnement nécessitent le développement de nouvelles formulations et méthodologies. Le présent chapitre présente les formulations et méthodologies développées dans le cadre du projet. Le développement présenté concerne le flambage local et latéral. Il a été choisi de développer ces sujets en particulier car ils semblaient être les sujets les moins bien développés dans la littérature. D'autres opportunités de développement ont été identifiées et sont présentées dans les travaux futurs à la fin du mémoire.

2.1 Flambage local

Le cas d'une plaque de longueur infinie simplement supportée sur ses quatre côtés est déjà présenté dans la littérature pour un chargement en cisaillement pur (section 1.2.4). Cependant, le cas d'un chargement en compression longitudinale n'est pas présenté pour les plaques infinies. Des formulations ont donc été développées pour ce type de chargement. Ces formulations sont intégrées dans l'outil de dimensionnement.

On développe une formulation permettant de prédire le flambage local d'une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés représentant l'âme du cadre et chargée en compression longitudinale (direction x , Figure 1-3). On considère un chargement de flambage adimensionnel tel que (équation (2-1)) (Leissa, 1985) :

$$\bar{N} = \frac{N_0 b^2}{\pi^2 D_{22}} \quad (2-1)$$

L'équation (1-35) peut alors être reformulée pour le chargement adimensionnel (2-1). On obtient l'équation (2-2).

$$\bar{N} = \frac{D_{11}}{D_{22}} m^2 \frac{1}{AR^2} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} + \frac{AR^2}{m^2} \quad (2-2)$$

Pour illustrer l'évolution du chargement de flambage adimensionnel en fonction de la longueur de la plaque, un exemple sera utilisé. On considère une plaque d'une largeur (b) de 19.685 po. La plaque a les propriétés orthotropes suivantes qui représentant un matériau composite aéronautique typique :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 373\,444 \text{ lb/po} \\ D_{12} &= 212\,417 \text{ lb/po} \\ D_{22} &= 291\,789 \text{ lb/po} \\ D_{66} &= 220\,412 \text{ lb/po} \end{aligned}$$

Le chargement adimensionnel \bar{N} en fonction du ratio AR est minimisé par rapport à m (nombre de demi-sinus dans la déformée de la plaque dans la direction x). Le résultat est présenté à la Figure 2-1. Chaque vague sur la courbe obtenue correspond à une valeur différente de m . On peut observer que les minimums de chaque vague ont la même valeur et que plus le ratio AR est grand, plus l'amplitude des vagues diminue. Le chargement adimensionnel de flambage converge lorsque la longueur de la plaque tend vers l'infini.

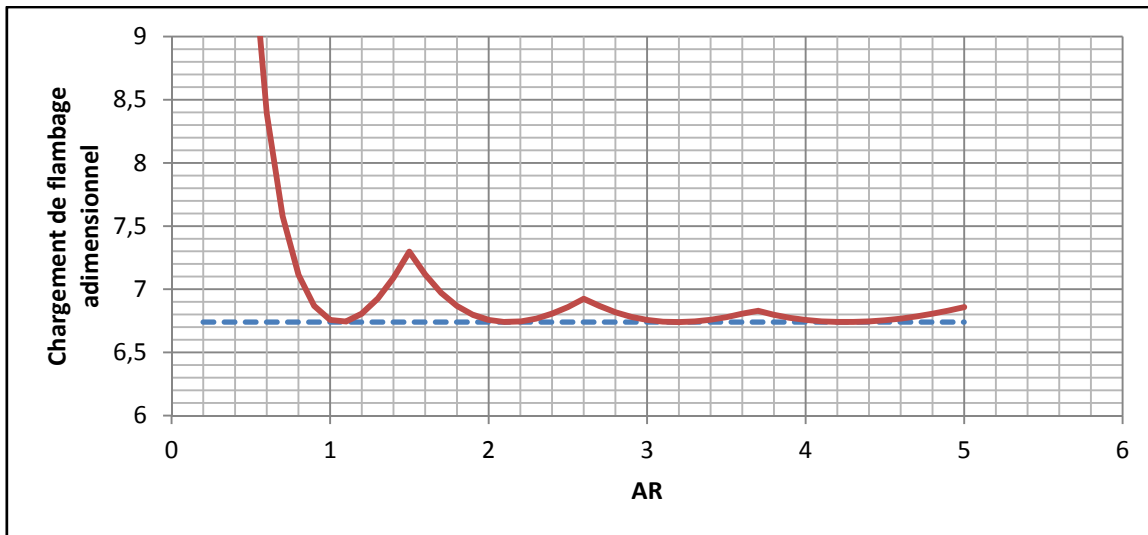


Figure 2-1 – Chargement de flambage adimensionnel d'une plaque simplement supportée sur ses quatre côtés en fonction du ratio de ses dimensions AR , en pointillé; le chargement de flambage adimensionnel pour une plaque de longueur infinie

On calcule le minimum d'une vague à la figure 2-1 en posant que la dérivée du chargement de flambage adimensionnel par rapport au ratio AR est égale à zéro. On obtient alors l'équation (2-3) qui ne dépend pas de m . Cela montre, mathématiquement, que les minimums sont tous identiques et on obtient donc l'équation qui correspond au chargement de flambage d'une plaque infinie.

$$\bar{N}_{min} = 2 \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \quad (2-3)$$

On peut reformuler cette équation en fonction du chargement de flambage non adimensionnel. On obtient le chargement de flambage d'une plaque infinie soumise à une compression longitudinale :

$$N_{\infty} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left(\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right) \quad (2-4)$$

2.2 Flambage latéral

Cette section présente les méthodes utilisées par l'outil de dimensionnement pour prédire le flambage latéral. Une première méthode, approximative, permet de prédire le flambage latéral de cadres métalliques (section 2.2.2). Elle a été construite à l'aide d'un plan d'expériences (section 2.2.1) et elle prend en compte la courbure du cadre. Une deuxième méthode, analytique, permet de calculer la contrainte de flambage latéral d'un cadre en matériau composite sans tenir compte de la courbure du cadre. Le cadre est donc supposé droit (section 2.2.3). Les deux premières méthodes sont ensuite combinées pour obtenir une prédiction du flambage latéral d'un cadre courbé fait d'un matériau composite grâce à la méthode du facteur matériau (section 2.2.4).

2.2.1 Plan d'expériences pour les cadres métalliques courbes

Un plan d'expériences est construit afin de développer un outil permettant une prédiction approximative du chargement de flambage latéral d'un cadre métallique (plan factoriel exhaustif). Le plan d'expériences est construit à partir d'analyses par éléments finis. Il prend en compte plusieurs phénomènes qui sont difficiles à inclure dans une méthode analytique :

- L'effet du rayon de courbure du fuselage;
- L'effet du positionnement de la bride interne (Cadre de section « C » et en « I »);
- La rigidité de l'ensemble peau et raidisseurs;
- La rigidité de l'âme du cadre pour la bride interne.

Un modèle par éléments finis a été développé et est illustré à la Figure 2-2. Il comporte la peau du fuselage, un cadre et quelques raidisseurs. Le nombre de raidisseurs dépend de la longueur du cadre, car l'espacement entre les raidisseurs est fixé à six po, soit l'espacement moyen pour un fuselage d'avion d'affaires. Cette portion de fuselage est considérée être simplement supportée sur tous les côtés, sauf pour les extrémités des raidisseurs qui ne sont pas supportées. Le cadre est chargé en compression longitudinale.

Le domaine du plan d'expériences correspond à la famille d'avion d'affaires. Les paramètres et les valeurs qui ont été utilisés sont présentés aux Tableau 2-1 et Tableau 2-2. Sept paramètres caractérisent le cadre et un paramètre caractérise l'ensemble peau-raisseur, soit la rigidité en flexion. Cette rigidité en flexion est évaluée dans la direction longitudinale des raidisseurs (direction z). Le Tableau 2-3 montre les dimensions des trois ensembles peau-raisseurs utilisés dans le plan d'expériences. Les valeurs de ce paramètre sont 1, 2 et 3, ce qui représente, respectivement, une rigidité minimale, moyenne et maximale par rapport aux rigidités en flexion obtenues pour les ensembles peau-raisseurs utilisés dans la famille d'avion d'affaires. Pour toutes les configurations testées, les épaisseurs de l'âme et des brides du cadre sont les mêmes. De plus, la largeur de la bride externe est fixée à un pouce, soit une valeur moyenne pour un avion d'affaire. Toutes les combinaisons de valeurs de paramètres

ont été testées. Cependant, pour certaines configurations, aucun mode de flambage latéral n'a pu être observé, car les premiers modes de flambage obtenus étaient tous locaux.

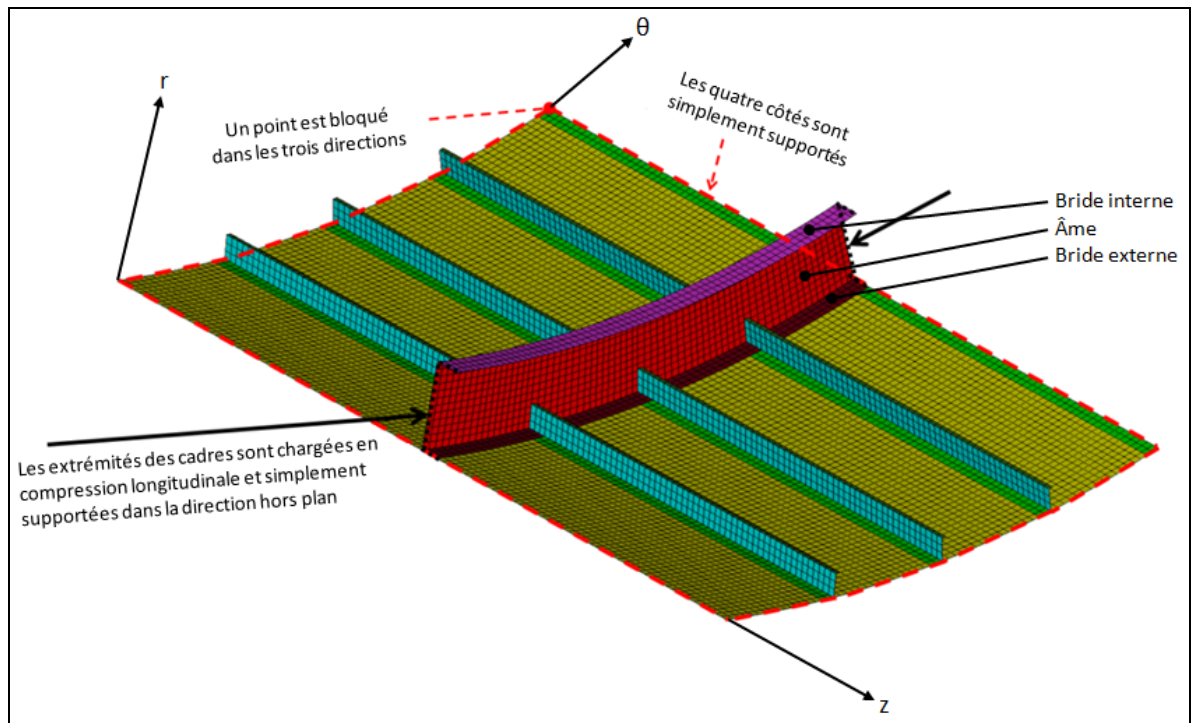


Figure 2-2 - Structure étudiée par le plan d'expériences

Tableau 2-1 - Paramètres et valeurs testés dans le plan d'expériences pour un cadre en « C »

Cadre en « C »		
Dimensions	Plan d'expériences	
	Liste de valeurs	Nb de valeurs
Matériau du cadre	Aluminium	1
Longueur du cadre (po)	6; 18 ou 30	3
Rayon de fuselage (po)	20; 30; 40; 50; 60; 70 ou 1000	7
Largeur de bride interne (po)	0,5; 1,0 ou 1,5	3
Hauteur de l'âme du cadre (po)	2,8; 3,6 ou 4,4	3
Largeur de bride externe (po)	1,0	1
Épaisseur du cadre (po)	0,05; 0,15 ou 0,25	3
Rigidité peau-raideurs	1; 2 ou 3	3
Nombre de simulations		1701

Tableau 2-2 - Paramètres et valeurs testés dans le plan d'expériences pour un cadre en « I »

Cadre en « I »		
Dimensions	Plan d'expériences	
	Liste de valeurs	Nb de valeurs
Matériau du cadre	Aluminium	1
Longueur du cadre (po)	6; 18; 30	3
Rayon de fuselage (po)	20; 30; 40; 50; 60; 70; 1000	7
Largeur de bride interne (po)	1,0; 2,25; 3,5	3
Hauteur de l'âme du cadre (po)	2,8; 3,6; 4,4	3
Largeur de bride externe (po)	1	1
Épaisseur du cadre (po)	0,05; 0,2; 0,35; 0,5	4
Rigidité peau-raideurs	1; 2; 3	3
Nombre de simulations		2268

Tableau 2-3 - Dimensions des ensembles peau-raideurs utilisés dans le plan d'expériences

Composantes		Min (1*)	Max (2*)	Moy (3*)
Bride interne gauche	Épaisseur (po)	0,060	0,359	0,180
	grandeur (po)	0,150	0,500	0,350
Bride interne droite	épaisseur (po)	0,000	0,000	0,000
	grandeur (po)	0,000	0,000	0,000
Âme	épaisseur (po)	0,060	0,150	0,080
	grandeur (po)	1,010	1,389	1,147
Bride externe gauche	épaisseur (po)	0,000	0,170	0,070
	grandeur (po)	0,000	1,474	0,620
Bride externe droite	épaisseur (po)	0,060	0,170	0,070
	grandeur (po)	0,640	1,520	0,640
Peau	épaisseur (po)	0,045	0,075	0,060
Surépaisseur	épaisseur (po)	0,105	0,105	0,105
espacement entre les raidisseurs (po)		6,853	5,955	6,000

**Valeurs du paramètre de rigidité en flexion de l'ensemble peau-raideurs*

Les hypothèses qui ont été faites pour simplifier le plan d'expériences sont les suivantes :

- Toutes les composantes sont faites d'aluminium.
 - Module de Young : 1,06E7 psi;
 - Module de cisaillement : 4,06E6 psi;
 - Coefficient de Poisson : 0,33.
- La bride externe a toujours une largeur d'un pouce pour le cadre en « C » et de deux po pour le cadre en « I ».
- L'ensemble peau-raidisateurs est simplifié à un seul paramètre de rigidité en flexion de l'ensemble peau-raidisateurs (Tableau 2-3).
- Le cadre et les raidisseurs sont parfaitement soudés à la peau du fuselage.
- Les raidisseurs passent à travers le cadre et leurs déplacements sont indépendants du déplacement du cadre.
- Les brides externes des raidisseurs et du cadre sont coïncidentes avec la peau (Figure 2-2).
- L'analyse de flambage est linéaire (SOL105 dans le logiciel d'éléments finis MD Nastran V2010).
- Le modèle par éléments finis est composé d'éléments 2D (CQUAD4, avec 4 nœuds ayant 6 degrés de libertés, soit trois déplacements et trois rotations).

Le plan d'expériences est réalisé en plusieurs étapes.

Étape 1 : Lancer les simulations par éléments finis à l'aide d'un outil de maillage développé

La première étape se résume à produire les résultats bruts à l'aide des simulations par éléments finis. Afin de pouvoir automatiser ce processus, un outil de maillage (nommé *mesher.exe*) a été codé en C++. Cet outil utilise deux fichiers ASCII en entrée. Un fichier décrit la topologie du modèle à mailler et le deuxième fichier indique les valeurs des paramètres. À l'aide des fichiers d'entrée, l'outil génère le fichier du modèle qui sera lu par Nastran pour faire la simulation par éléments finis en utilisant le solveur SOL105 (analyse de flambage linéaire). Un deuxième outil nommé *analysis.exe* également codé en C++ permet

d'automatiser cette séquence d'actions et de rassembler tous les résultats dans un seul fichier de résultats finaux. Les deux outils sont présentés plus en détail à l'en Annexe IV.

Étape 2 : Tri des résultats

La deuxième étape consiste faire un tri des résultats pour en faire ressortir les modes de flambage latéral. Les résultats bruts produits à l'étape 1 sont importés dans un fichier Excel qui a été préparé pour analyser et trouver le premier mode de flambage latéral pour chaque configuration de fuselage. Le livrable de cette étape est une liste des chargements de flambage latéral pour les configurations qui ont effectivement engendré du flambage latéral. Plus de détails sur les calculs d'analyse de mode de flambage sont donnés à la section 2.2.1.1.

Étape 3 : Construction des modèles approximatifs

À la troisième étape, des modèles approximatifs sont construits à l'aide des résultats triés de l'étape 2. Dans ce cas-ci, les modèles approximatifs sont des équations quadratiques faisant une estimation du flambage latéral du cadre. Un outil codé avec MatLab permet de diviser le domaine couvert par le plan d'expériences en plusieurs sous-domaines puis de générer un modèle approximatif pour chacun de ces sous-domaines. Il en résulte une liste de modèles approximatifs permettant d'estimer le chargement de flambage latéral pour toute configuration de cadre faisant partie du domaine du plan d'expériences. L'outil trouve également de quelle façon le domaine doit être divisé en sous-domaines pour maximiser la précision globale des modèles approximatifs, soit en minimisant les erreurs entre les estimations et les résultats obtenus par éléments finis. La précision globale est égale à celle du modèle le moins précis. L'outil teste toutes les possibilités de division du domaine en sous-domaines et choisit celle qui donne la plus grande précision globale.

La Figure 2-3 montre de quelle façon l'outil divise le domaine avec un exemple simple à deux paramètres. Les sous-domaines peuvent être divisés à nouveau à plusieurs reprises et indépendamment de la manière dont sont divisés les autres sous-domaines. La section 2.2.1.1 donne plus de détails sur les calculs associés à la génération des modèles approximatifs. L'outil MatLab est présenté en détail à l'Annexe V.

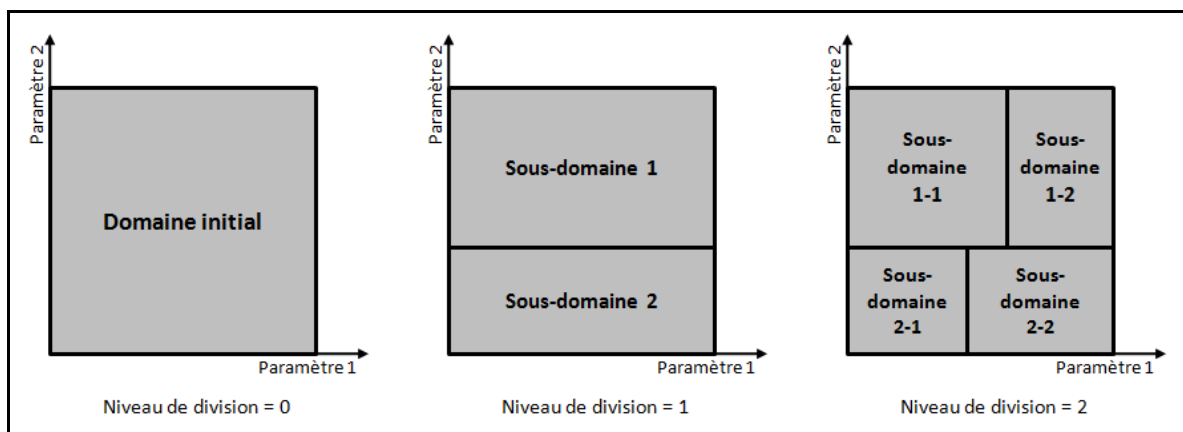


Figure 2-3 - Exemple d'une division du domaine

Étape 4 : Construire l'outil Excel approximatif de flambage latéral d'un cadre métallique

La quatrième et dernière étape du plan d'expériences consiste à construire une feuille de calcul Excel qui permet d'entrer les dimensions et paramètres d'une configuration de fuselage arbitraire et d'obtenir une estimation du chargement de flambage latéral du cadre. La feuille de calcul choisit le modèle approprié en fonction des entrées fournies. La feuille de calcul Excel est présentée en détail à la section 2.2.2.

2.2.1.1 Analyse des modes de flambage

Un outil d'analyse des modes de flambage a été développé dans le but de connaître le mode de flambage prédominant lorsqu'un cadre se déforme par instabilité. L'outil se base sur les déplacements obtenus dans la déformée pour calculer les proportions de chaque mode de flambage. En effet, les modes de flambage sont rarement purs et combinent habituellement plusieurs modes différents. Le mode de flambage dominant est parfois difficile à déterminer visuellement à partir de la déformée globale du cadre. L'outil d'analyse permet de déterminer le mode dominant de manière quantitative plutôt que qualitative.

Le principe démontré ici peut être appliqué à une infinité de cas. Il est utilisé dans le cas présent pour calculer le flambage latéral d'un cadre, mais il pourrait facilement être adapté à tout type de structures. Dans un premier temps, les modes de flambage possibles pour la

structure étudiée sont sélectionnés. La déformée associée à chaque mode est ensuite décrite. À partir de la déformée obtenue pour un cadre, la proportion de chaque mode de flambage est établie. Par exemple, les résultats d'une analyse pourraient indiquer qu'il y a 46% de flambage latéral, 33% de flambage local dans l'âme, 12% de flambage local dans la bride et 9% de flambage local dans la peau. Le mode prédominant est identifié à l'aide de ces valeurs. Pour déterminer le mode de flambage dominant, un critère se basant sur les proportions de modes de flambage purs est défini. Ce critère sera expliqué plus en détail à la section 2.2.1.2.

Choix des modes de flambage et déformées

Pour le cadre de fuselage, quatre modes de flambage sont étudiés, soit le mode latéral du cadre, le mode local dans l'âme, le mode local dans la bride et le mode local dans la peau du fuselage. Les modes de flambage et la déformée associée à chacun d'eux sont présentés à la Figure 2-4.

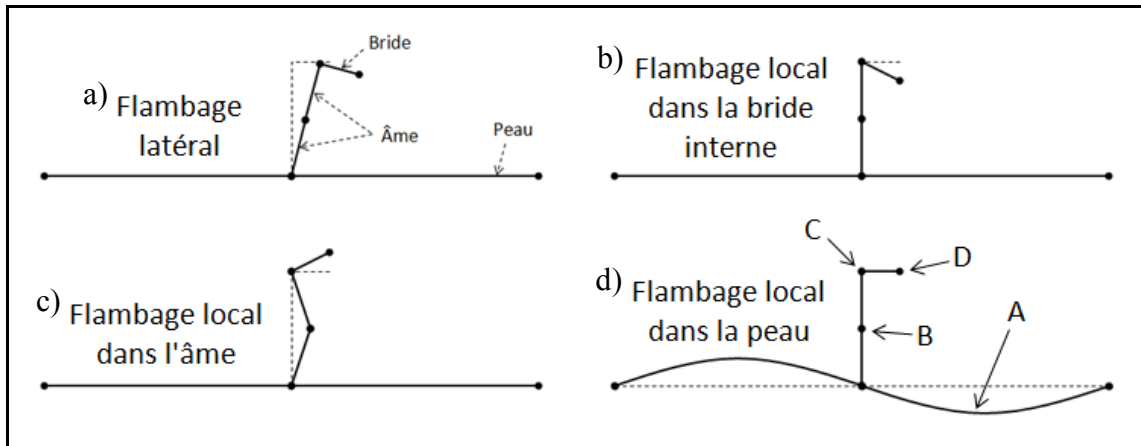


Figure 2-4 – Sections déformées du cadre pour les modes de flambage purs (les groupes de nœuds A, B, C et D sont identifiés)

Afin de représenter ces déformées, il faut choisir des groupes de nœuds dans le modèle par éléments finis. Les déplacements de ces groupes de nœuds sont utilisés pour caractériser chaque mode pur ainsi que pour calculer les proportions de chaque mode de flambage. Le déplacement de chaque groupe de nœuds est représenté par le déplacement du nœud s'étant le plus déplacé (Tableau 2-4).

Tableau 2-4 - Groupes de nœuds considérés pour les déplacements

Déplacements	Endroit où le déplacement maximal est enregistré
d_A	la peau
d_B	l'âme (à mi-hauteur de l'âme)
d_C	le coin (côté commun entre âme et bride)
d_D	la bride (côté libre)

En utilisant les groupes de nœuds, on peut simplifier une déformée de flambage initialement décrite par des centaines de nœuds, à quatre déplacements seulement (d_A , d_B , d_C et d_D). Par exemple, pour le flambage latéral, on suppose une rotation de l'âme sans que celle-ci ne se déforme (voir Figure 2-4 a)). Par conséquent, on s'attend à avoir un plus grand déplacement à la jonction de l'âme et de la bride qu'au centre de l'âme. Par cette analyse, les déplacements d_A , d_B , d_C et d_D pourraient être évalués à 0, 0,5, 1 et 1, respectivement. Au-delà des valeurs, ce sont les proportions entre elles qui comptent. Ainsi, nous aurions aussi bien pu choisir les valeurs 0, 1, 2 et 2. Il s'agit d'une première pondération faite de façon arbitraire. Avec cette première pondération, la matrice de déplacement suivante peut être écrite :

Tableau 2-5 - Matrice des déplacements après la première pondération

Mode	d_A (peau)	d_B (âme)	d_C (coin)	d_D (bride)
Latéral	0	0,5	1	1
Âme	0	1	0	$\pi L_{bride}/L_{ame}$
Bride	0	0	0	1
Peau	1	0	0	0

Les valeurs présentées au Tableau 2-5 sont ensuite ajustées à l'aide d'une analyse plus détaillée qui est présentée à l'Annexe I. Les valeurs ajustées grâce à cette dernière analyse sont présentées au Tableau 2-6.

Tableau 2-6 - Matrice des déplacements finaux

Mode	d_A (peau)	d_B (âme)	d_C (coin)	d_D (bride)
Latéral	0	$0,35L_{ame}$	$0,8L_{ame}$	$0,8L_{ame}$
Âme	0	$0,31L_{ame}$	0	L_{bride}
Bride	0	0	0	$0,64L_{bride}$
Peau	$0,31L_{peau}$	0	0	0

Calcul des proportions entre les modes de flambage

Chaque ligne du Tableau 2-6 présente les déplacements obtenus dans les groupes de points (d_A , d_B , d_C et d_D) pour un mode de flambage pur. En combinant une certaine quantité de chacune des lignes du Tableau 2-6 (ces quantités sont représentées par les variables q_L , q_W , q_F et q_S), on obtient les déplacements totaux dans les groupes de points pour un mode de flambage combinant plusieurs modes purs.

Les valeurs du Tableau 2-6 sont placées telles quelles dans la matrice de déplacement $[G]$ (équation (2-5)).

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & G_i & G_j & G_k \\ 0 & G_m & 0 & G_n \\ 0 & 0 & 0 & G_e \\ G_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

On peut formuler une équation permettant de calculer le déplacement total dans chaque groupe (d_A , d_B , d_C et d_D) en fonction de la quantité de chaque mode de flambage (q_L , q_W , q_F et q_S).

$$\begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \\ d_C \\ d_D \end{Bmatrix} = [G]' \begin{Bmatrix} q_L \\ q_W \\ q_F \\ q_S \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

À l'inverse, on peut aussi calculer la quantité de chaque mode de flambage (q_L , q_W , q_F et q_S) en fonction des déplacements dans chaque groupe de nœuds (d_A , d_B , d_C et d_D) :

$$\begin{Bmatrix} q_L \\ q_W \\ q_F \\ q_S \end{Bmatrix} = ([G]')^{-1} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \\ d_C \\ d_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_C \frac{1}{G_j} \\ d_B \frac{1}{G_m} + d_C \frac{-G_i}{G_j G_m} \\ d_D \frac{1}{G_e} + d_C \left(\frac{G_i G_n}{G_j G_m G_e} - \frac{G_k}{G_j G_e} \right) + d_B \frac{-G_n}{G_m G_e} \\ d_A \frac{1}{G_f} \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

Finalement, on peut obtenir la proportion de chaque mode en calculant le ratio de la quantité de chaque mode par rapport à la somme de toutes les quantités. La Figure 2-5 montre deux exemples de déformées après flambage et leurs proportions de modes de flambage sont présentées au Tableau 2-7. Le premier cas (cas *A*) illustre une situation où le mode de flambage est du flambage latéral (proportion de flambage latéral de 70%). Comme dans la majorité des cas, on voit aussi qu'il y a un peu de flambage local dans la bride. Dans le deuxième cas (cas *B*), le mode de flambage est beaucoup moins évident à déterminer. Il y a beaucoup de flambage local dans l'âme et certains observateurs jugeraient qu'il s'agit de flambage local. Cependant, le coin de la jonction entre l'âme et la bride n'est pas resté droit après flambage, ce qui est contradictoire avec la définition du flambage local. Pour cette raison, d'autres observateurs classeraient ce mode comme étant du flambage latéral. La définition du mode de flambage latéral est fondée sur le fait que la bride ne fournit plus un support suffisant à l'âme, que le coin ne reste pas droit et qu'il y a déversement. Il est jugé que cette définition est plus importante que le fait que du flambage local soit présent dans l'âme. Le cas B est donc classé comme du flambage latéral. La section 2.2.1.2 donne plus de détail sur le classement des modes de flambage.

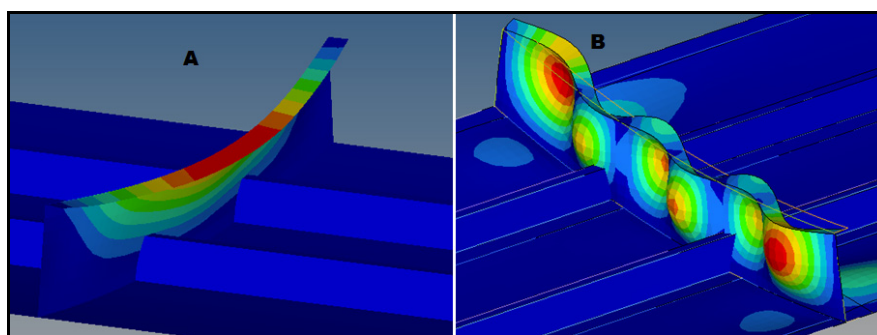


Figure 2-5 - Déformées après flambage des exemples A et B

Tableau 2-7 - Proportions des modes de flambage des exemples A et B

Mode de flambage	Exemple A	Exemple B
Latéral du cadre	70%	15%
Local dans l'âme	6%	30%
Local dans la bride	20%	45%
Local dans la peau	5%	10%

2.2.1.2 Choix d'un critère de sélection et sondage

Le calcul des proportions de chaque mode de flambage n'est pas suffisant pour déterminer le mode de flambage dominant dans une déformée. Quand on lance une simulation par éléments finis pour une configuration donnée, on obtient plusieurs chargements critiques correspondants à plusieurs modes de flambage. Parmi ces modes, certains ne sont pas considérés comme étant du flambage latéral. L'objectif est d'utiliser la méthodologie d'analyse des modes de flambage pour automatiser le choix du mode qui représentera le flambage latéral pour la configuration donnée. La méthodologie doit permettre de trouver le premier mode latéral parmi tous les modes obtenus. Pour ce faire, la méthodologie doit permettre d'analyser chaque mode de flambage, un à la fois, et décider si ce mode est latéral ou pas, comme le ferait un ingénieur en calcul de contraintes de structure. Il faut donc déterminer un critère, basé sur les proportions de modes de flambage calculées, qui permettra de déterminer de quel type de mode il s'agit. Le critère choisi consiste à calculer le ratio (R_C) de la proportion de flambage latéral (q_L) sur la proportion maximale parmi les quatre modes de flambage possibles (q_L, q_W, q_F et q_S).

$$R_C = \frac{q_L}{\max(q_L, q_W, q_F, q_S)} \quad (2-8)$$

Si ce ratio est supérieur à une certaine valeur ($R_{C,min}$), il s'agit de flambage latéral. La valeur $R_{C,min}$ a été déterminée à l'aide d'un sondage. 18 déformées différentes après flambage ont été présentées à neuf ingénieurs en calcul de contraintes de structure et d'expérience variant de moins d'un an à plus de 20 ans. Chacun d'eux devait décider si, selon lui, il s'agissait de flambage latéral ou pas. Les résultats sont présentés au Tableau 2-8. Le pourcentage de certitude indique la proportion des répondants qui ont été en accord avec la réponse majoritaire. À l'aide de ces résultats, la valeur de $R_{C,min}$ a été ajustée à 0,3. Si la valeur de R_C était entre 0,15 et 0,3, l'algorithme classait le mode de flambage comme « peut-être ». Cet intervalle a été utilisé uniquement pour le sondage. Pour les étapes qui suivent, seule la valeur minimum ($R_{C,min}$) de 0,3 a été conservée. Les résultats du critère de sélection de flambage latéral sont également présentés au Tableau 2-8 sous la colonne nommée « algorithme ». Dans la majorité des cas, l'algorithme est en accord avec les répondants.

Tableau 2-8 - Résultats du sondage sur le flambage latéral
(voir Annexe III pour le détail de chacun des cas)

Est-ce qu'il s'agit de flambage latéral ?			
Cas	Sondage	% certitude	Algorithme
1	non	88%	non
2	non	100%	non
3	Peut-être	50%	oui
4	oui	86%	oui
5	non	86%	oui
6	oui	86%	oui
7	oui	100%	oui
8	non	100%	non
9	non	100%	non
10	oui	75%	oui
11	yes	86%	oui
12	non	57%	oui
13	oui	100%	oui
14	non	100%	non
15	non	57%	oui
16	Peut-être	50%	Peut-être
17	oui	63%	oui
18	Peut-être	50%	Peut-être

En plus de permettre d'ajuster le critère de sélection, le sondage a aussi confirmé que la méthode fonctionne. Dans 94% des cas, l'algorithme a donné le même résultat que le sondage. De plus, les modes pour lesquels l'algorithme était en désaccord avec le sondage sont ceux qui étaient les plus difficiles à classer et ces modes n'étaient pas les premiers modes de flambage. C'est-à-dire que pour la même configuration de fuselage, d'autres modes de flambage que celui étudié se produisaient d'abord à chargements plus faibles. Le mode analysé n'était donc pas le mode critique. L'Annexe III présente le détail de chacun des cas du sondage. Les deux exemples de la Figure 2-5 ont été identifiés comme du flambage latéral par l'algorithme comme l'ont fait la majorité des répondants du sondage.

2.2.1.3 Régression avec erreur relative

Le développement de modèles approximatifs à partir d'une série de données nécessite souvent une régression où l'erreur quadratique moyenne est minimisée. Dans le cas étudié ici, on utilisera des erreurs relatives plutôt que des erreurs absolues (Tofallis, 2009). L'erreur est donc définie comme étant la différence entre les valeurs prédite et réelle divisée par la valeur réelle. On utilise également les erreurs relatives pour comparer la précision des modèles approximatifs.

Si on utilise les erreurs absolues pour générer les modèles approximatifs, ceux-ci auront une mauvaise précision lorsque les prédictions sont faibles. Par contre, l'utilisation d'erreurs relatives permet de générer des modèles approximatifs qui gardent une précision constante pour toutes les valeurs prédites. Les Figure 2-6 et Figure 2-7 donnent un exemple permettant d'observer ce phénomène. Ces figures représentent les valeurs réelles en fonction des prédictions des modèles approximatifs. Ces figures ont été générées en utilisant des erreurs absolues et relatives, respectivement. On voit sur la Figure 2-7 que la différence entre les prédictions et les valeurs réelles a tendance à diminuer lorsque les valeurs prédites sont faibles, permettant de conserver une bonne précision dans ce domaine.

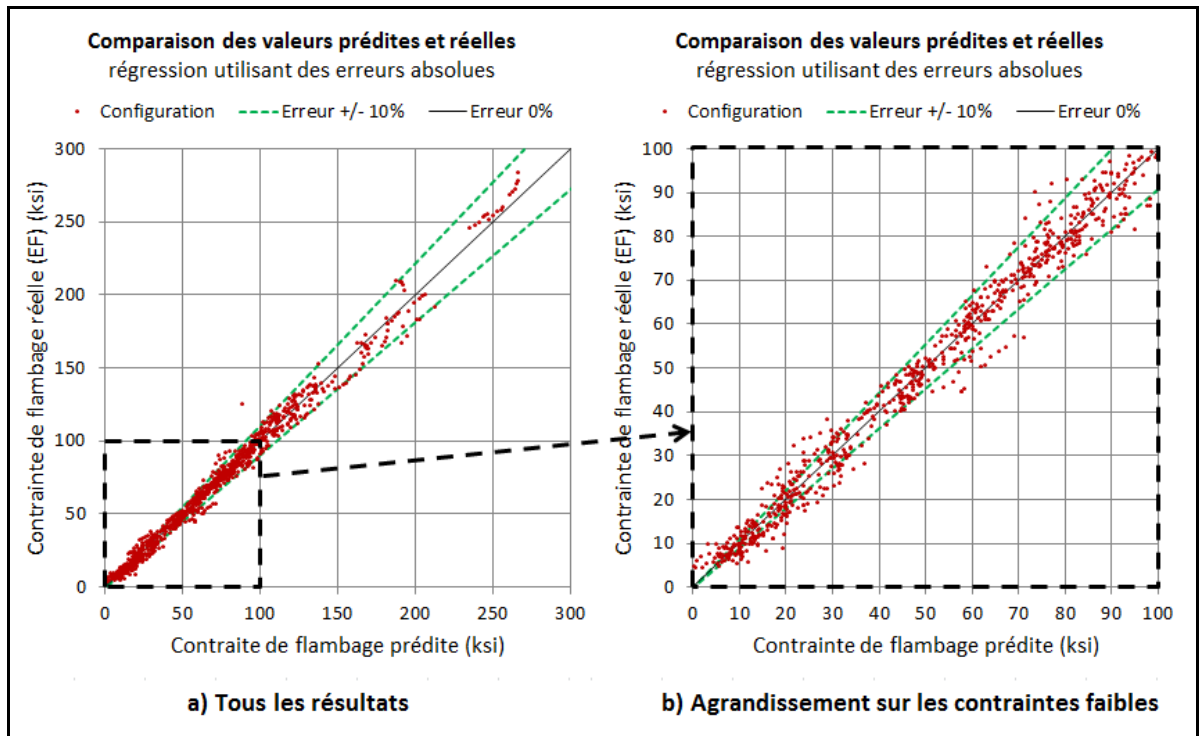


Figure 2-6 - Régression quadratique en utilisant les erreurs absolues

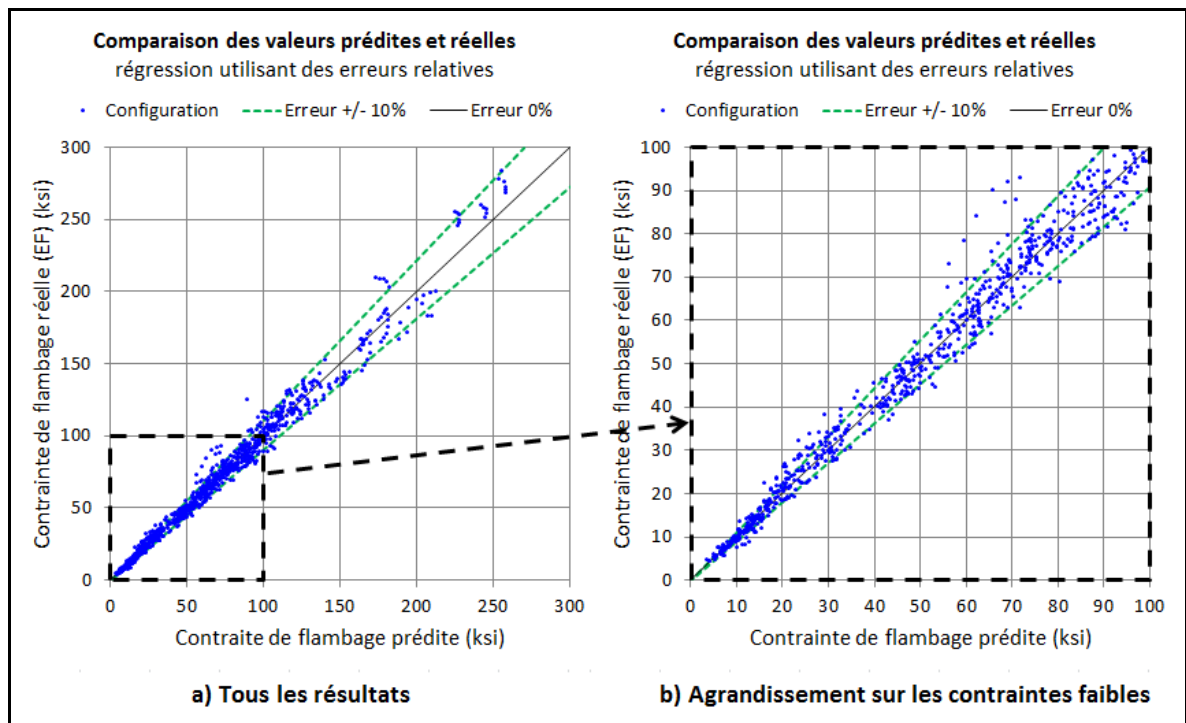


Figure 2-7 - Régression quadratique en utilisant les erreurs relatives

2.2.2 Outil Excel approximatif de flambage latéral d'un cadre métallique

L'outil Excel approximatif de flambage latéral métallique est le produit final du plan d'expériences. Cet outil contient plusieurs modèles quadratiques. Quand un utilisateur entre des paramètres dans l'outil, celui-ci utilise le modèle approximatif adéquat pour faire une estimation du chargement de flambage latéral du cadre. L'outil permet également de modifier les résultats en les rendant plus conservateurs, selon les consignes de l'utilisateur. La Figure 2-8 montre la structure de l'outil. L'exemple qui y est donné consiste en une section de cadre en « C ». Des sections de cadres en « I » sont également possibles. Un troisième onglet permet à l'utilisateur de calculer la rigidité de l'ensemble peau et raidisseurs, qui est un paramètre d'entrée pour estimer le flambage latéral. Ce troisième onglet est présenté à la Figure 2-9.

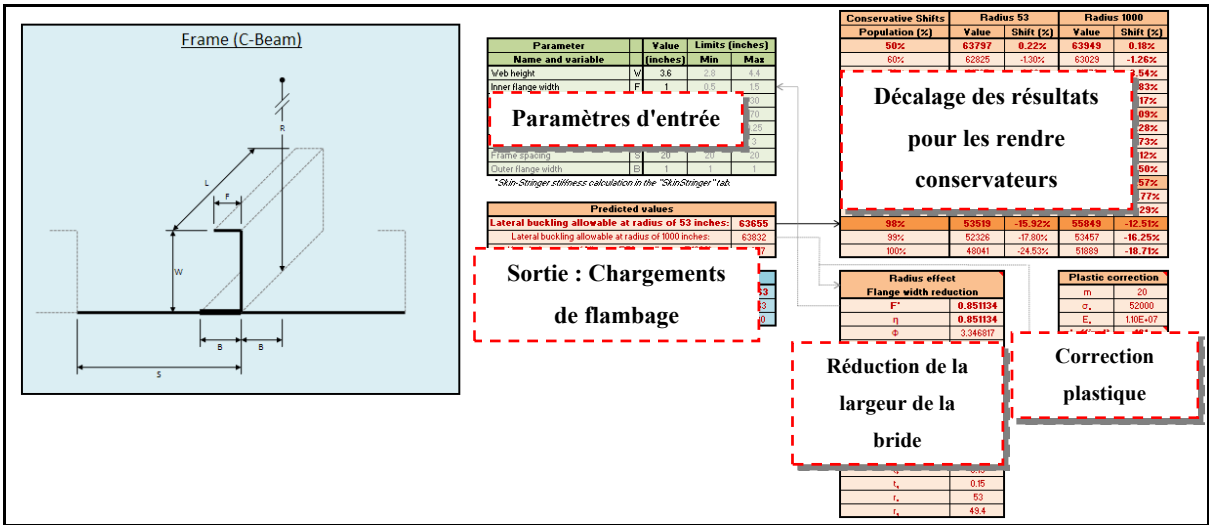


Figure 2-8 - Apparence de l'outil Excel approximatif

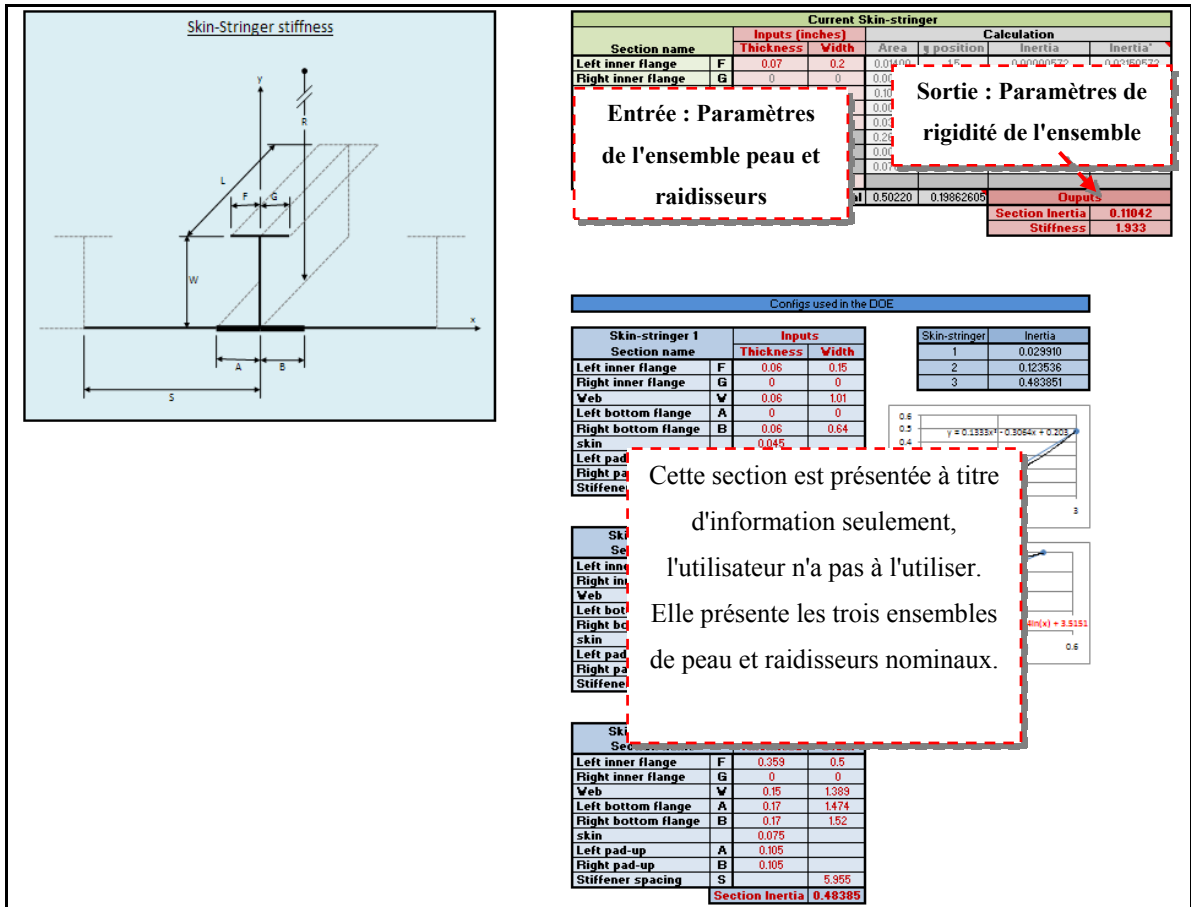


Tableau 2-9 - Configurations de validation

Paramètres	Cadre en « C »	Cadre en « I »
Matériau du cadre	Alu (E=1,06E psi)	Alu (E=1,06E7 psi)
Longueur du cadre (po)	12; 24	12; 24
Rayon du fuselage (po)	35; 55	35; 55
Largeur de la bride interne (po)	0,75; 1,25	1,625; 2,875
Hauteur de l'âme du cadre (po)	3,2; 4,0	3,2; 4,0
Largeur de la bride externe (po)	1,0	1
Épaisseurs d'âme et brides (po)	0,1; 0,2	0,1; 0,2
Rigidité peau-raideurs	1,5; 2,5	1,5; 2,5
Nombre de simulations :	64	64

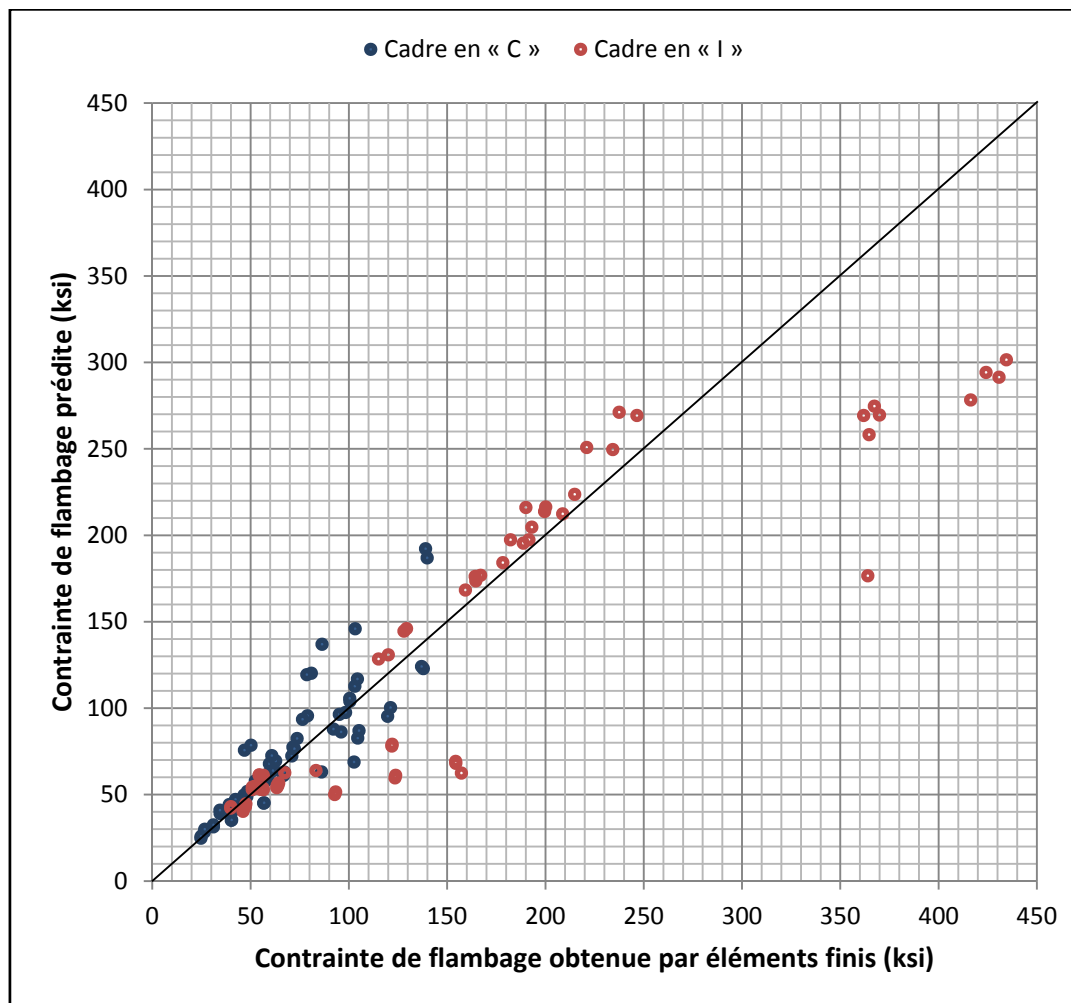


Figure 2-10 - Comparaison des contraintes prédites par l'outil Excel approximatif et obtenues par éléments finis pour les configurations de validation

La Figure 2-11 montre la distribution des erreurs obtenues avec l'outil approximatif pour les nouvelles simulations. On voit que près de 80% des prédictions ont une erreur inférieure à 10%. De façon générale, les erreurs associées à l'outil approximatif sont donc relativement faibles. On voit également que toutes les prédictions ne sont pas conservatrices. Un décalage des résultats permettrait de s'assurer d'obtenir des prédictions conservatrices. L'outil approximatif permet de faire un tel décalage (Voir Annexe II).

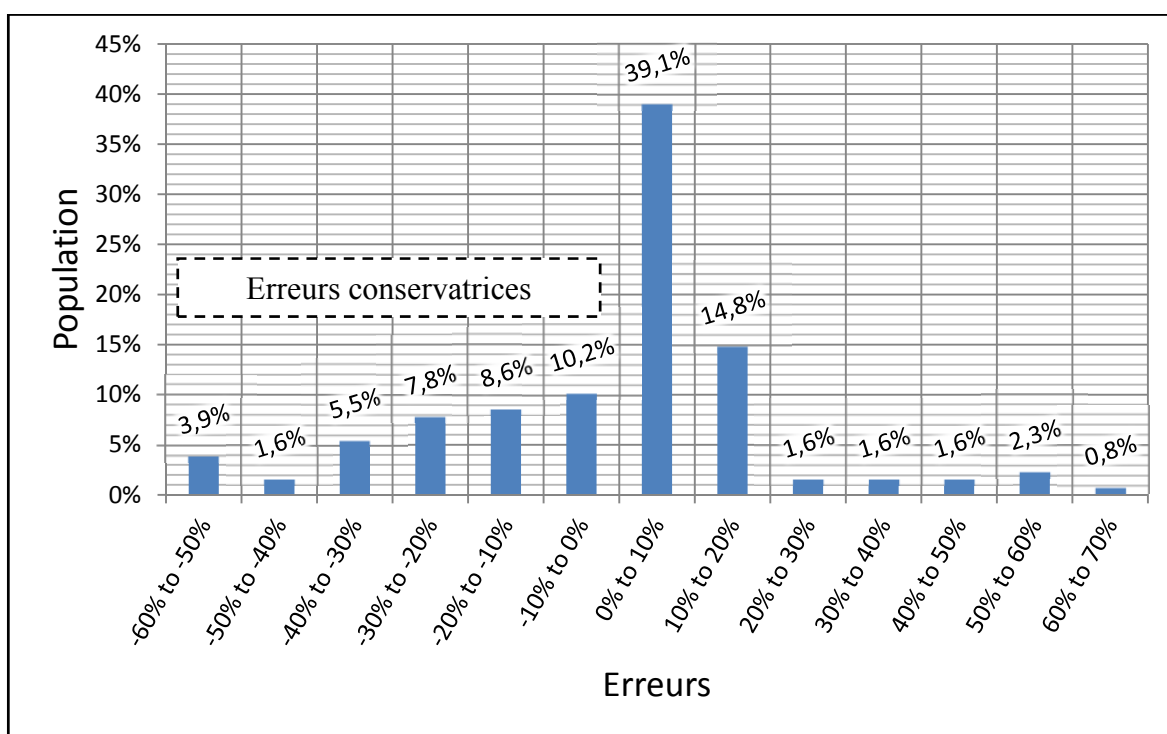


Figure 2-11 - Distribution des erreurs obtenues avec les configurations de validation (erreur = (valeur prédite – valeur obtenue par éléments finis) / valeur obtenue par éléments finis)

2.2.2.2 Changement de modèles

En fonction des paramètres entrés par l'utilisateur, l'outil Excel choisit un modèle approximatif parmi tous ceux qui sont disponibles. Lorsqu'un paramètre d'entrée est changé, il est possible que l'outil change de modèle, ce qui peut créer une discontinuité dans la prédiction du chargement de flambage latéral. La Figure 2-12 montre la prédiction de la contrainte de flambage latéral par l'outil Excel en fonction d'un paramètre géométrique du

cadre. Dans cet exemple, la hauteur de l'âme varie de 2,8 po à 4,4 po. On peut observer un changement de modèle approximatif à une hauteur de cadre de 3,6 po. Ce changement de modèle provoque un saut d'environ 5% dans les résultats. L'amplitude du saut dans cet exemple est représentative des sauts qui peuvent survenir lors des changements de modèles. Il est recommandé à l'utilisateur de l'outil Excel approximatif de vérifier que la configuration qu'il souhaite tester ne soit pas trop près d'un changement de modèle. Si c'est le cas, il peut alors ajuster le chargement de flambage obtenu en conséquence.

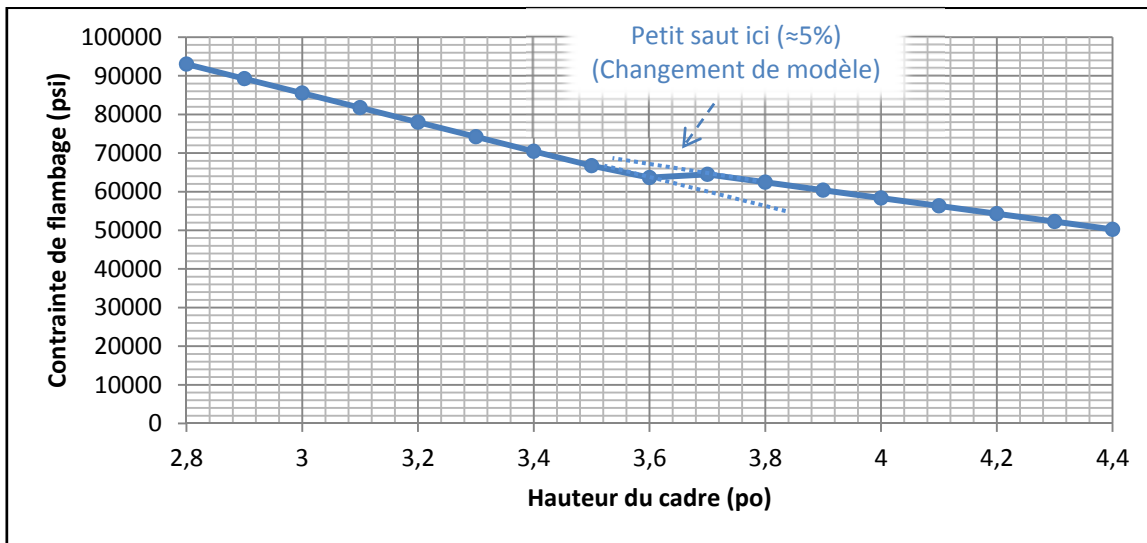


Figure 2-12 - Effet d'un changement de modèle sur les résultats de prédiction de contrainte de flambage latéral d'un cadre métallique

2.2.3 Méthode analytique pour cadres droits en matériau composite

Une formulation analytique pour le flambage latéral d'un cadre droit en matériau composite a été développée. Cette formulation a été inspirée de quelques articles tirés de la littérature (Mittelstedt et Schagerl, 2010; Weigraeber, Mittelstedt et Becker, 2012). Cette section présente le développement mathématique ainsi qu'une étude de cas permettant d'évaluer la précision de la formulation.

Un autre cas semblable a été développé durant ce projet et a fait l'objet d'un article de conférence ICCM19 « International Conference on Composite Materials » (Sauvé, et al. 2013). Celui-ci est en fait un cas plus spécifique de ce qui est présenté ici. La condition frontière du côté à $y = 0$ (voir Figure 2-13) est supposée encastree (voir Annexe VII).

2.2.3.1 Développement mathématique

Définition du problème

La structure étudiée est présentée à la Figure 2-13. Il s'agit d'une plaque rectangulaire orthotrope de longueur a et de largeur b . Cette plaque représente l'âme du cadre. Elle est chargée en compression (σ_x) dans la direction de sa longueur (x). Les deux côtés chargés sont simplement supportés. Le côté situé à $y = 0$ est simplement supporté et des ressorts de rotation (rigidité R_R) et de torsion (rigidité R_T) sont répartis sur ce même côté. Le côté situé à $y = b$ est supporté par une bride orthotrope de largeur h . La bride est simplifiée à une poutre ayant trois rigidités, soit une rigidité en compression (EA), en flexion (EI) et en torsion (GJ).

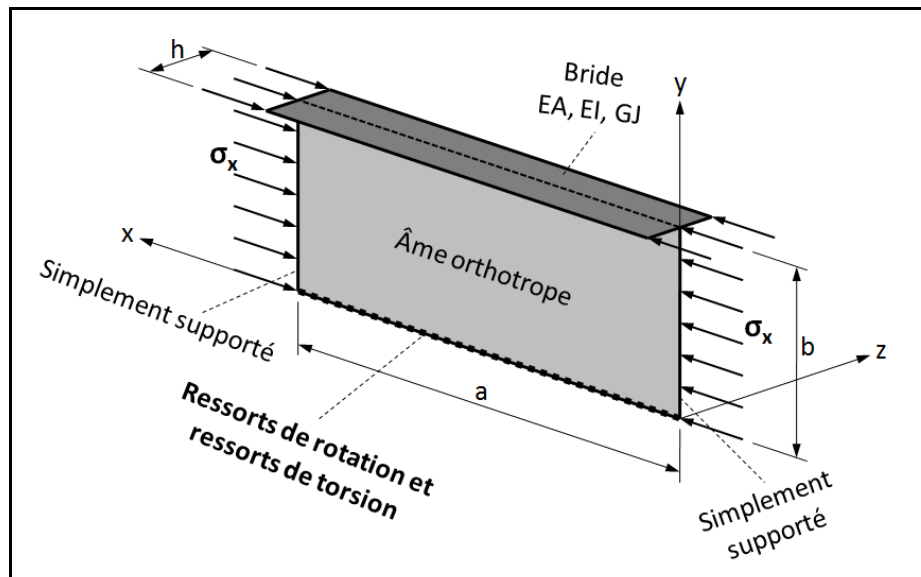


Figure 2-13 - Structure étudiée : Plaque orthotrope représentant l'âme d'un cadre

Pour le développement analytique présenté ici, la théorie classique des stratifiés est utilisée (Gibson, 2011; Kollar et Springer, 2003). Les stratifiés sont supposés symétriques et équilibrés et le couplage entre la flexion et la torsion est négligé. L'équation (2-9) décrit l'interaction entre les moments de flexion (M_x , M_y et M_{xy}) et la courbure du stratifié (κ_x^0 , κ_y^0 et κ_{xy}^0).

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

Les coefficients D_{ij} sont les coefficients de rigidité en flexion du stratifié. La relation entre les courbures du stratifié et la déformée de la plaque est décrite par l'équation (2-10) :

$$\kappa_x^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy}^0 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2-10)$$

où w est le déplacement hors plan. L'équation (2-11) est l'équation gouvernante d'un stratifié orthotrope symétrique et équilibré sous compression longitudinale, qui est une version simplifiée de l'équation (1-32) :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2-11)$$

L'équation de la déformée

Comme les côtés situés à $x = 0$ et à $x = a$ sont simplement supportés, on suppose que la déformée suit une forme sinusoïdale dans la direction x :

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \varphi(y) \quad (2-12)$$

où $\varphi(y)$ est l'équation de la déformée qui est fonction de y uniquement. La solution fondamentale de l'équation de la déformée est (Qiao et Zou, 2002) :

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & C_1 \cosh\left(\frac{k_1 m \pi y}{a}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{k_1 m \pi y}{a}\right) + C_3 \cos\left(\frac{k_2 m \pi y}{a}\right) \\ & + C_4 \sin\left(\frac{k_2 m \pi y}{a}\right) \end{aligned} \quad (2-13)$$

Les constantes $C_{1,2,3,4}$ sont inconnues. Les paramètres k_1 et k_2 font partie de la solution fondamentale :

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{D_{22}} \left(\sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left(N_x \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 - D_{11} \right)} \pm (D_{12} + 2D_{66}) \right)} \quad (2-14)$$

Les conditions frontières

À $y = 0$, les déplacements hors plan sont nuls :

$$w|_{y=0} = 0 \quad (2-15)$$

De plus, les moments exercés par les ressorts de rotation sont proportionnels à l'angle de rotation par rapport à x tandis que les moments exercés par les ressorts en torsion sont proportionnels à la deuxième dérivée de l'angle par rapport à x . Une deuxième équation décrit donc cette condition frontière (Bank et Jiansheng, 1996) :

$$D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - R_R \frac{\partial w}{\partial y} + R_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2-16)$$

Le côté situé à $y = b$ est supporté par une bride (Mittelstedt et Schagerl, 2010). Sur ce côté, une première équation décrit l'interaction entre le moment de flexion et la torsion dans la bride :

$$D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - GJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (2-17)$$

Une deuxième équation décrit l'interaction du cisaillement dans la plaque avec la flexion et la compression dans la bride :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \delta N_x b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (2-18)$$

La solution du problème

On obtient un système d'équations à quatre inconnues. L'instabilité de la structure est analysée en posant que le déterminant du système d'équations est égal à zéro. On obtient alors l'équation transcendante suivante :

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 \cosh\left(\frac{\pi m}{a} b k_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} b k_2\right) + V_3 \cosh\left(\frac{\pi m}{a} b k_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{a} b k_2\right) \\
 + V_4 \sinh\left(\frac{\pi m}{a} b k_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a} b k_2\right) \\
 + V_5 \sinh\left(\frac{\pi m}{a} b k_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{a} b k_2\right) = 0
 \end{aligned} \tag{2-19}$$

où $V_{1,2,3,4,5}$ sont :

$$\begin{aligned}
 V_1 \left(R_T \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + R_R \right) (k_1 k_2) \left(2D_{12}(D_{12} + 4D_{66}) + D_{22}^2(k_1^4 + k_2^4) \right. \\
 \left. + 2D_{22}(D_{12} + 2D_{66})(k_2^2 - k_1^2) + 2EIGJ \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - 2N_{11}GJbd \right)
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 = \left(D_{22} k_1 \frac{\pi m}{a} \right) \left(\left(R_R + R_T \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \right) \left(EI - N_{11}bd \frac{a^2}{\pi^2 m^2} + GJk_2^2 \right) (k_1^2 + k_2^2) \right. \\
 + (D_{12} + D_{22}k_2^2)(D_{12}k_2^2 - D_{22}k_1^4 + 4D_{66}(k_1^2 + k_2^2)) \\
 \left. + \left(GJ EI \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - N_{11}GJbd \right) (k_1^2 + k_2^2) + (k_1^2)(D_{12}^2 - D_{22}^2 k_2^4) \right)
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

$$\begin{aligned}
 V_3 = (k_1 k_2) \left(2 \left(R_T \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + R_R \right) \left(D_{22}^2 k_1^2 k_2^2 - D_{12}^2 - 4D_{12}D_{66} \right. \right. \\
 \left. + D_{22}(D_{12} + 2D_{66})(k_1^2 - k_2^2) - GJ EI \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + N_{11}GJbd \right) \\
 \left. + D_{22}^2 GJ \frac{\pi^2 m^2}{a^2} (2k_1^2 k_2^2 + k_2^4 + k_1^4) \right)
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

$$\begin{aligned}
V_4 = & \left(R_T \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + R_R \right) \left(\left(EIGJ \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - N_{11} GJbd + D_{12}^2 + 4D_{12}D_{66} \right) (k_1^2 - k_2^2) \right. \\
& + D_{12}D_{22}(2k_1^2 k_2^2 - k_1^4 - k_2^4) - D_{22}^2(k_1^2 k_2^2)(k_1^2 - k_2^2) \\
& \left. + 8D_{22}D_{66}(k_1^2 k_2^2) \right) \\
& + \left(EID_{22}^2 \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - N_{11} bdD_{22}^2 \right) (k_1^4 + k_2^4 + 2k_1^2 k_2^2)
\end{aligned} \tag{2-23}$$

$$\begin{aligned}
V_5 = & \left(\frac{\pi m}{a} D_{22} k_2 \right) \left(\left(R_T \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + R_R \right) \left(N_{11} bd \frac{a^2}{\pi^2 m^2} - EI + GJk_1^2 \right) (k_1^2 + k_2^2) \right. \\
& + \left(N_{11} GJbd - EIGJ \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - 4D_{12}D_{66} - D_{12}^2 + 4D_{22}D_{66}k_1^2 \right) (k_1^2 \\
& \left. + k_2^2) + D_{12}D_{22}(k_1^4 - k_2^4) + D_{22}^2(k_1^2 k_2^4 + k_1^4 k_2^2) \right)
\end{aligned} \tag{2-24}$$

L'inconnue à trouver dans l'équation transcendante est le chargement N_x . Étant donné sa complexité, cette équation doit être résolue numériquement.

2.2.3.2 Résolution de l'équation transcendante

L'équation transcendante possède plusieurs racines. La première racine située dans l'intervalle valide est la solution recherchée. La méthode binaire est utilisée à cette fin. Un intervalle initial de recherche est d'abord défini (voir section 2.2.3.3). Le déterminant est ensuite évalué à la borne inférieure (det_i), à la borne supérieure (det_s) et au centre de l'intervalle (det_c). En analysant le signe algébrique du déterminant aux trois positions, on détermine dans quelle moitié est située la première racine. On réduit alors l'intervalle de recherche de moitié. Une deuxième itération est faite sur l'intervalle de recherche réduit et ainsi de suite jusqu'à ce que la précision désirée soit atteinte. La Figure 2-14 montre un exemple de courbe de déterminant en fonction du chargement (N_x). Dans cet exemple, on peut déduire que la première racine est située dans la première moitié de l'intervalle de recherche, car le déterminant est positif aux bornes, mais négatif au centre.

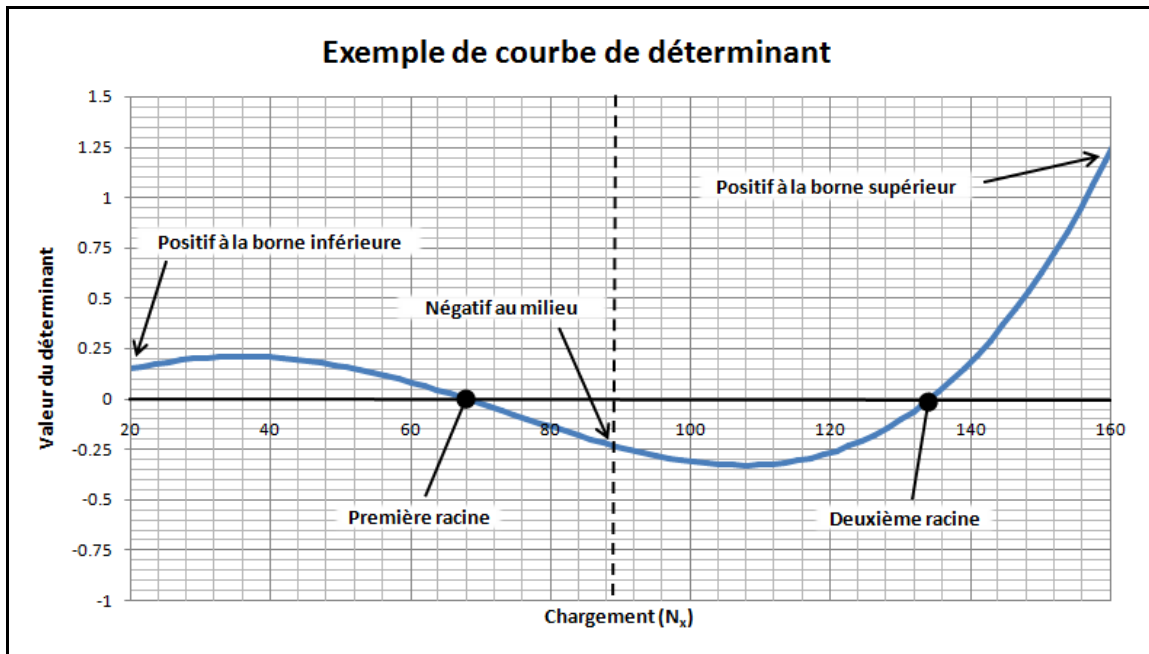


Figure 2-14 - Exemple de déterminant en fonction du chargement (N_x)

Après avoir testé plusieurs cas du plan d'expériences, il a été observé que le déterminant n'avait jamais plus de deux racines dans l'intervalle de recherche. Un algorithme a été élaboré pour permettre de déduire dans quelle moitié se situe la première racine du déterminant. Cet algorithme est présenté au Tableau 2-10.

Tableau 2-10 - Algorithme de déduction de la position de la première racine

Signes algébriques de (det_i) et (det_c)	Signes algébriques de (det_c) et (det_s)	Moitié dans laquelle est située la première racine
Différents	Différents	Première
Différents	Pareils	Première
Pareils	Différents	Deuxième
Pareils	Pareils	Première

2.2.3.3 Les bornes de l'intervalle de recherche

Lorsque le contenu d'une des racines carrées de l'équation de k_1 ou k_2 (équation (2-14)) est négatif, le déterminant est imaginaire. Le chargement nécessaire pour que le contenu des racines carrées soit égal à zéro est utilisé comme borne inférieure de l'intervalle de recherche

$(N_x)_{min}$. Cette valeur est trouvée en posant égal à zéro le contenu des racines carrées et en isolant le chargement. Après simplification, on trouve deux équations seulement. La valeur maximale parmi les chargements calculés avec ces deux équations est la borne inférieure de l'intervalle de recherche.

$$(N_x)_{min} = \max \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(D_{11} - \frac{(D_{12} + 2D_{66})^2}{D_{22}} \right), \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{11} \right) \quad (2-25)$$

La borne maximale de l'intervalle de recherche est obtenue quand la rigidité des ressorts (R_R ou R_T) et la rigidité de la bride sont infinies. Ce cas particulier est équivalent à des conditions frontières encastées sur le côté de la plaque situé à $y = 0$ et à $y = b$ (Figure 2-15).

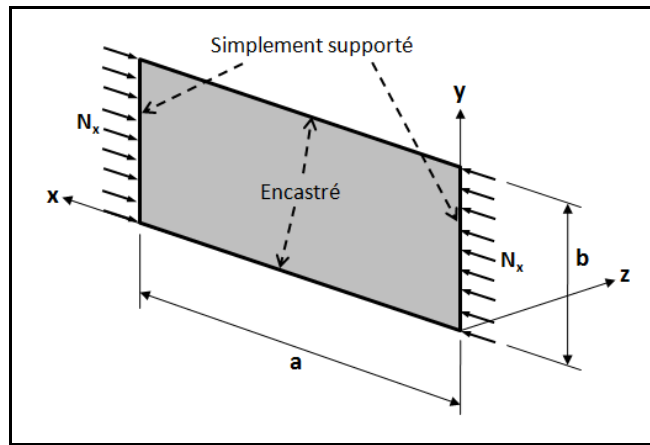


Figure 2-15 - Plaque simplement supportée à $x = 0$ et $x = a$ et encastée à $y = 0$ et $y = b$

Le chargement de flambage avec de telles conditions frontières sera calculé par la méthode Ritz. Cette méthode n'est pas exacte, mais elle donne toujours un chargement plus élevé que le chargement exact. Comme cette méthode est utilisée pour calculer la borne supérieure de l'intervalle de recherche, un chargement plus élevé est acceptable. On suppose que la déformée après flambage ($w_{cc}(x,y)$) suit une forme sinusoïdale dans la direction x et cosinusoïdale dans la direction y :

$$w_{cc}(x,y) = B \sin \left(x \frac{m\pi}{a} \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{y}{b} \right) \right) \quad (2-26)$$

où B est l'amplitude de la déformée. L'énergie totale dans la plaque après flambage (V) est la somme de l'énergie de déformation (V_B) et de l'énergie due à la contrainte appliquée (V_L) (Kollar et Springer, 2003) :

$$V = V_B + V_L \quad (2-27)$$

$$V_B = \frac{1}{2} \iint_{Aire} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2-28)$$

$$V_L = -\frac{1}{2} \iint_{Aire} \left[(N_x)_{cc} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (2-29)$$

où $(N_x)_{cc}$ est le chargement de flambage avec les conditions frontières encastrees. La plaque est instable lorsque la dérivée de l'énergie totale de la plaque par rapport l'amplitude de la déformée est nulle.

$$\frac{\partial V}{\partial B} = 0 \quad (2-30)$$

L'équation du chargement de flambage est alors obtenue après isolation de $(N_x)_{cc}$ dans l'équation de l'énergie totale (V). Le chargement de flambage sera considéré comme étant la borne supérieure de l'intervalle de recherche $(N_x)_{max}$:

$$(N_x)_{max} = (N_x)_{cc} = \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 D_{11} + \frac{16}{3} \left(\frac{\pi a}{mb^2} \right)^2 D_{22} + \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) \quad (2-31)$$

2.2.3.4 Étude de cas

L'objectif principal de l'étude de cas est d'évaluer la précision de la méthode analytique par rapport à des simulations par éléments finis. Elle permettra également d'observer l'effet de la rigidité de l'ensemble peau et raidisseurs sur le chargement de flambage. Le cas étudié est un cadre droit ayant des dimensions moyennes par rapport au plan d'expériences de la section

2.2.1. L'effet de certains paramètres sur la contrainte de flambage latéral et sur la précision a également été évalué en faisant varier ceux-ci. Ces paramètres sont la largeur de la bride et la rigidité des ressorts de rotation.

Les stratifiés

Dans la présente étude de cas, les stratifiés considérés sont faits de fibres de carbone et d'époxy avec les propriétés suivantes (Figure 1-1) :

- $E_{11} = 21596$ ksi;
- $E_{22} = 1459$ ksi;
- $\nu = 0,33$;
- $G_{12} = 653$ ksi;
- Épaisseur de pli = 0.0057 po.

On pose une séquence d'empilements générique qui a la forme :

$$\left[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_j^\circ)_k (45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_i^\circ) \right]_s \quad (2-32)$$

où la valeur de i est calculée à partir de j :

$$i = \left\lceil \frac{1}{2}j \right\rceil \quad (2-33)$$

La séquence d'empilement générique permet de respecter les recommandations de la littérature (CMH-17, 2012; Niu, 1988) où on trouve entre autre les recommandations suivantes pour le stratifié :

- être symétrique et équilibré;
- être homogène;
- comprendre au moins 10% de fibres dans chacune des directions suivantes : 0° , θ° , $-\theta^\circ$, 90° ;
- avoir la majorité des fibres dans la direction 0° ;
- avoir un maximum de 45° entre les directions de deux plis adjacents;
- ne pas avoir de plis à 90° regroupés;
- regrouper au maximum cinq plis de même angle, la valeur de j ne doit pas dépasser 5 (cette valeur varie d'une source à l'autre dans la littérature, soit égale à 3, 4 ou 5) ;
- posséder la séquence $[\theta^\circ/90^\circ/-\theta^\circ]$ à la surface externe du stratifié.

Les angles sont donnés par rapport à la direction principale du stratifié. Dans cette étude de cas, on suppose $\theta = 45^\circ$. La séquence d'empilements générique est utilisée pour définir quelques stratifiés qui sont décrits par les valeurs de j et de k (Tableau 2-11).

Tableau 2-11 - Séquences d'empilement utilisées

Nom	j	k	Nb de plis	t	E _x	E _y	a ₁₁	d ₆₆
				po	ksi	ksi	ksi ⁻¹ po ⁻¹	ksi ⁻¹ po ⁻¹
Iso1	1	0	8	0,0456	8219	8219	4,13E-03	1,03E-01
Iso2	1	1	16	0,0912	8219	8219	2,07E-03	1,12E-02
Ortho1	4	0	10	0,0570	10895	7110	2,49E-03	4,75E-02
Ortho2	4	1	24	0,1368	12678	6261	8,93E-04	4,10E-03
Ortho3	4	2	38	0,2166	13148	6028	5,43E-04	1,13E-03
Ortho4	4	3	52	0,2964	13364	5919	3,91E-04	4,61E-04
Ortho5	4	4	66	0,3762	13489	5856	3,04E-04	2,33E-04
Ortho9	4	8	122	0,6954	13702	5748	1,62E-04	3,88E-05

Les séquences d'empilement *Iso1* et *Iso2* sont utilisées pour la peau du fuselage. Les séquences *Ortho1* à *Ortho9* sont utilisées pour les raidisseurs et le cadre. Ces séquences d'empilement ont des épaisseurs semblables aux fuselages moyens.

Les ensembles peau et raidisseurs

Il est nécessaire de connaître la rigidité des ensembles peau et raidisseurs pour pouvoir utiliser la formulation analytique. Trois ensembles de peau et raidisseurs ont été définis. Ils ont été choisis arbitrairement pour représenter des ensembles avec une rigidité faible, moyenne et élevée par rapport aux fuselages d'avions d'affaire. Les dimensions de ces ensembles sont illustrées à la Figure 2-16 et présentées au Tableau 2-12.

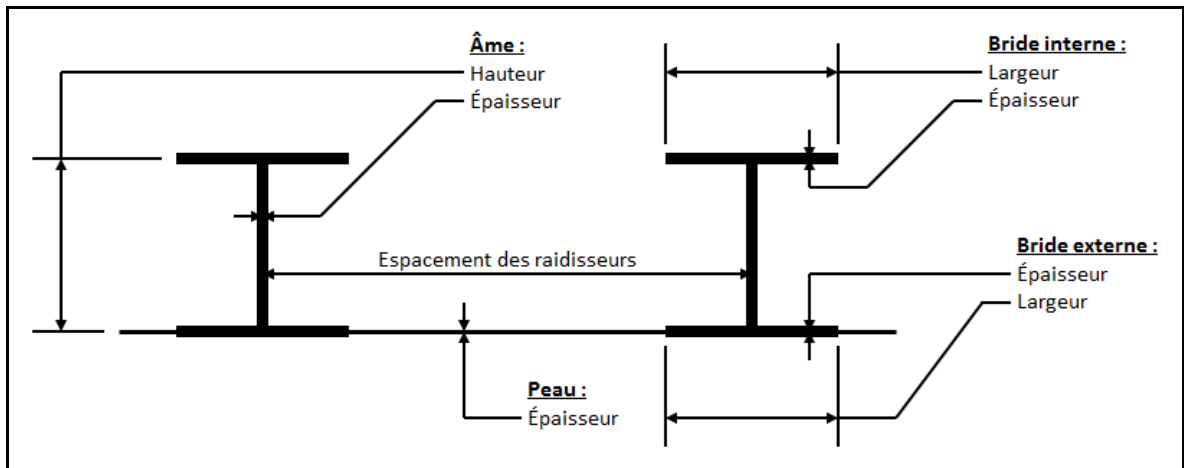


Figure 2-16 - Section de l'ensemble peau et raidisseurs

Tableau 2-12 - Ensembles peau et de raidisseurs

Composante		Unité	Peau-raideurs de rigidité :		
			minimale	moyenne	maximale
Bride interne	Stratifié	-	Ortho2	Ortho3	Ortho4
	Largeur	po	0,118	0,236	0,394
	Épaisseur	po	0,137	0,217	0,297
Âme	Stratifié	-	Ortho1	Ortho2	Ortho2
	Hauteur	po	0,787	0,984	1,378
	Épaisseur	po	0,057	0,137	0,137
Bride externe	Stratifié	-	Ortho1	Ortho2	Ortho2
	Largeur	po	0,394	0,787	1,181
	Épaisseur	po	0,057	0,137	0,137
Peau	Stratifié	-	Iso1	Iso1	Iso2
	Épaisseur	po	0,046	0,046	0,091
Espace des raidisseurs		po	5,9	5,9	5,9

Une rigidité équivalente a été trouvée pour chaque ensemble de peau et de raidisseurs à l'aide de simulations par éléments finis (voir section 2.2.4.2). Ces rigidités équivalentes sont définies en utilisant les ressorts de rotation (R_R). Les valeurs de ces rigidités sont présentées au Tableau 2-13.

Tableau 2-13 - Rigidités équivalentes des ensembles de peau et raidisseurs

Peau-raideurs	Rigidité R_R
Nom	lb po/po
Minimale	13201
Moyenne	52709
Maximale	179425

Résultats

Dans l'étude de cas présentée ici, l'âme du cadre a une hauteur de 3.346 po et une longueur de 17.717 po. Elle est composée du stratifié *Ortho2*. La bride est composée du stratifié *Ortho3* et sa largeur varie de 0 po à 3.937 po (Cadre en « I »). Les ressorts de torsion sont négligés (voir section 2.2.3). On teste cinq valeurs de rigidité des ressorts en rotation (R_R). Les rigidités testées sont de zéro (*SS*), minimale (*Min*), moyenne (*Medium*), maximale (*Max*) et infinie (*C*). Les rigidités nulle et infinie permettent d'avoir une condition frontière équivalente à un support simple et à un encastrement, respectivement. Les résultats obtenus à l'aide de la formulation analytique (équation (2-19)) sont présentés à la Figure 2-17.

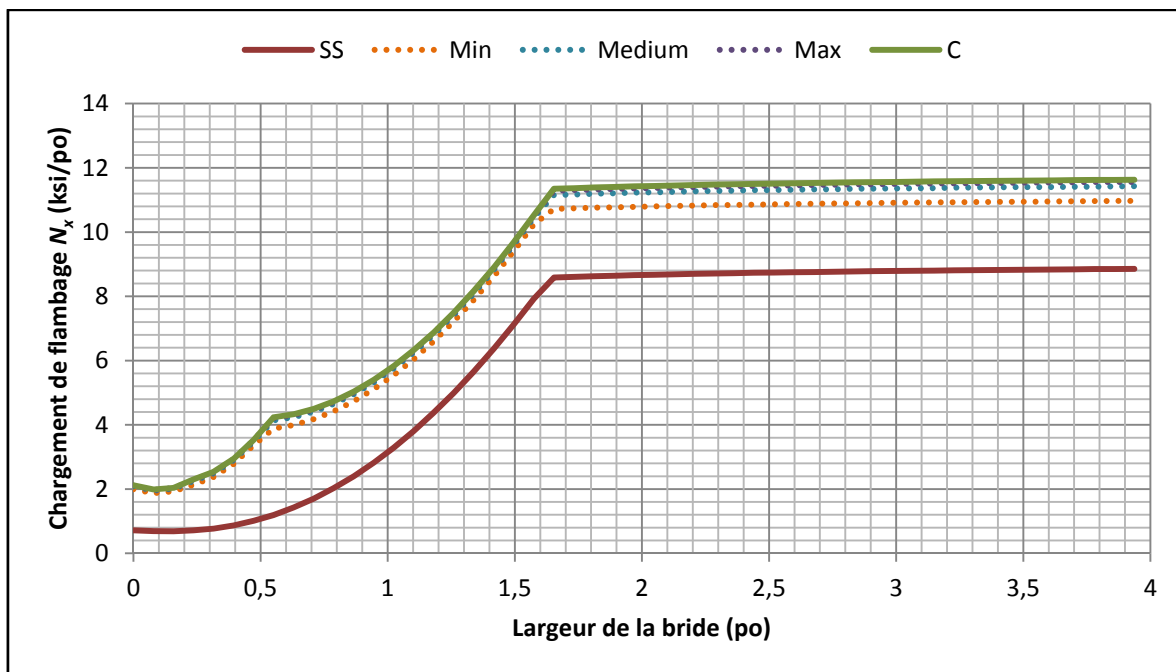


Figure 2-17 - Chargement de flambage en fonction de la largeur de bride avec différentes rigidités (R_R)

Les chargements obtenus avec les trois rigidités intermédiaires sont près des chargements obtenus avec une rigidité infinie, soit équivalente à une condition frontière encastree. L'hypothèse que la condition frontière est simplement supportée est donc très conservatrice. Avec cette hypothèse, les chargements obtenus sont d'au moins 20% inférieurs à ceux obtenus avec les conditions frontières intermédiaires.

L'effet de la condition frontière intermédiaire a été observé plus en détail pour une largeur de bride (h) égale à 0,787 po et 2,362 po (voir Figure 2-13). La Figure 2-18 montre le chargement de flambage en fonction de la rigidité des ressorts de rotation.

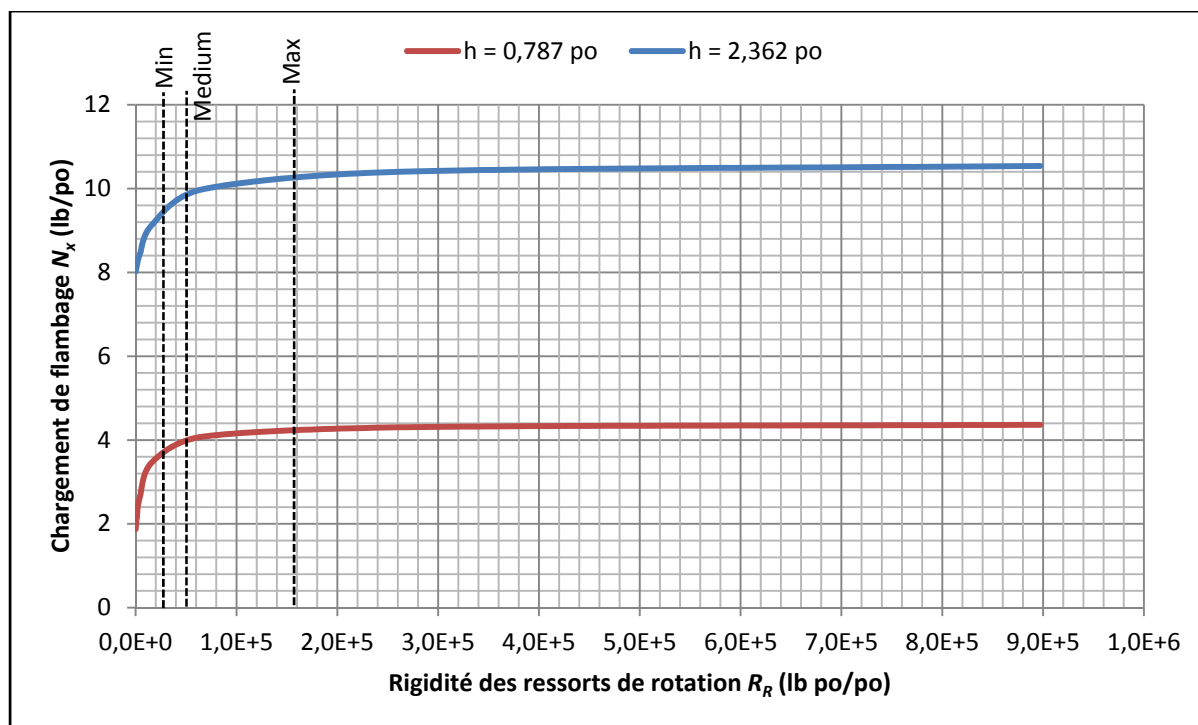


Figure 2-18 - Chargement de flambage en fonction de la rigidité des ressorts de rotation R_R et de la largeur de bride h (Les valeurs de R_R sont indiquées par des lignes verticales « Min », « Medium » et « Max »)

On peut voir que le chargement de flambage augmente et converge rapidement lorsque la rigidité des ressorts augmente, pour s'approcher rapidement de la valeur obtenue avec un encastrement. Dans ce cas-ci, cet effet est semblable pour les deux hauteurs de bride (h).

On compare finalement les résultats analytiques avec des simulations par éléments finis (EF). Le modèle d'éléments finis utilisé est présenté à la Figure 2-19. Une analyse de convergence a été faite pour la taille des éléments. Les éléments utilisés sont des éléments de type CQUAD d'une largeur de 0.2 po. Les simulations ont été faites à l'aide de Nastran. Les résultats sont présentés à la Figure 2-20.

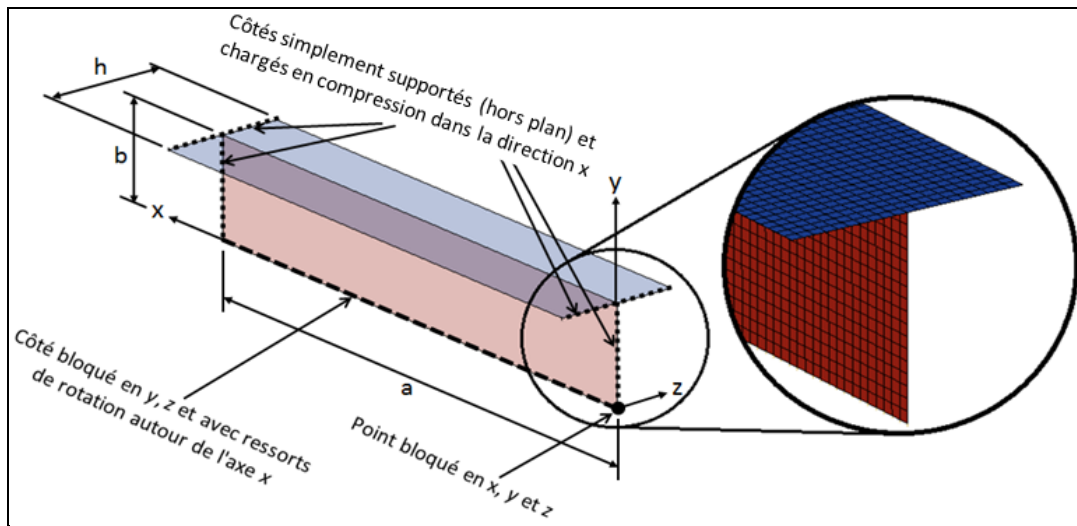


Figure 2-19 - Modèle éléments finis du cadre avec ressorts de rotation

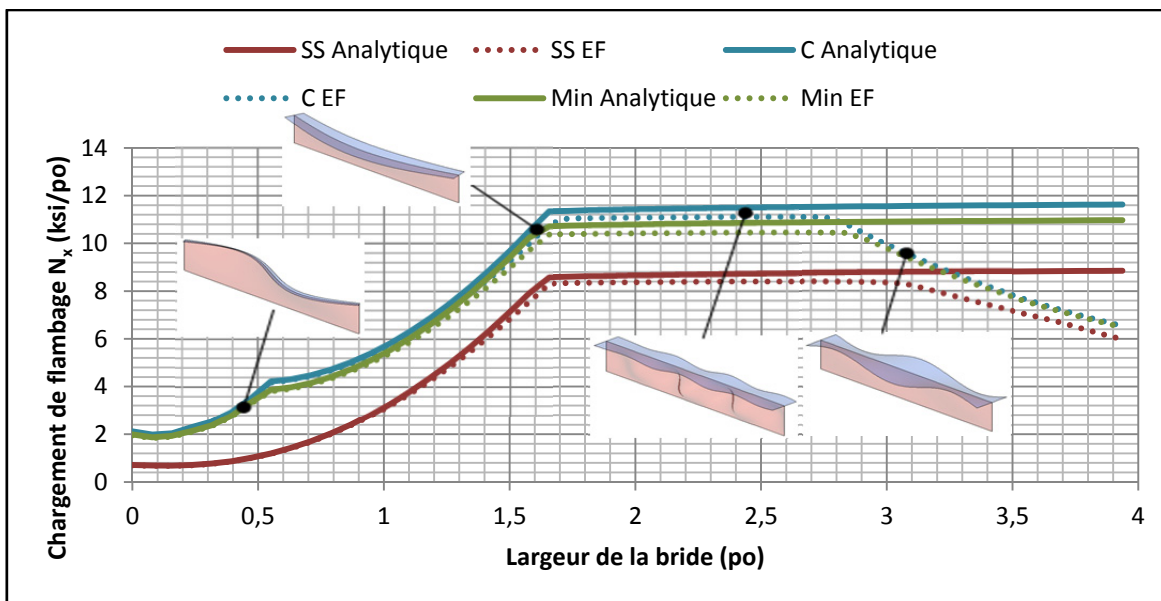


Figure 2-20 - Chargement de flambage en fonction de la largeur de bride.
Comparaison des résultats obtenus analytiquement et par éléments finis

On peut voir que les résultats analytiques sont près des résultats obtenus par éléments finis. Les erreurs obtenues sont égales ou inférieures à 4% lorsque la largeur de la bride est 2,5 po ou moins. De plus, les erreurs sont semblables pour toutes les rigidités de ressorts R_R . Cependant quand la largeur de la bride est relativement grande, on obtient du flambage local dans la bride et ce mode de flambage n'est pas prédit par la formulation analytique. C'est pour cette raison qu'avec une largeur de bride supérieure à 3 po environ, il y a une grande différence entre les résultats analytiques et par éléments finis. Cette différence n'est pas considérée comme une erreur, car la formulation analytique n'a pas été conçue pour prédire le flambage local dans la bride.

On peut également observer qu'il y a un changement de mode lorsque la largeur de la bride atteint une valeur d'environ 1.65 po. À cette valeur, le mode de flambage passe de latéral à local dans l'âme. Ces deux modes de flambage sont différents, mais ils sont tous deux prédits par la formulation analytique. Lors de ce changement de mode, les chargements de flambage atteignent un plateau. Une augmentation de la largeur de la bride n'a alors que peu d'effet sur le chargement de flambage. On observe donc un phénomène de largeur de bride minimum pour un chargement de flambage suffisant.

2.2.4 Méthode du facteur matériau

Dans cette section, nous combinons l'approche présentée à la section 2.2.2, soit l'outil approximatif devant servir à prédire le flambage latéral d'un cadre métallique en prenant en compte la courbure et l'approche présentée à la section 2.2.3, soit le développement analytique qui permet de prédire le flambage latéral d'un cadre composite droit. La combinaison des deux approches permet d'obtenir une méthode plus complète pour estimer le chargement de flambage latéral d'un cadre composite. Une hypothèse importante est faite : nous supposons que l'effet d'un changement de matériau sur le chargement de flambage d'un cadre droit est le même que sur un cadre courbé. La validité de la méthode du facteur matériau est directement fondée sur cette hypothèse. L'erreur associée à celle-ci sera évalué à la section 2.2.4.1. L'équation analytique développée à la section 2.2.3 permet de calculer les

chargements de flambage latéral de cadres droits métallique et composite. On définit le facteur matériau comme étant le ratio entre les chargements de flambage des cadres droits métallique et composite. Les modèles approximatifs développés à la section 2.2.1 à l'aide du plan d'expériences permettent quant à eux de prédire le chargement de flambage latéral d'un cadre courbé métallique. On estime le chargement de flambage latéral d'un cadre courbé composite en multipliant le facteur matériau par le chargement de flambage du cadre courbé métallique.

2.2.4.1 Étude préliminaire

L'hypothèse du facteur matériau est évaluée à l'aide d'une étude de cas. Les propriétés du matériau du cadre sont modifiées graduellement et la contrainte de flambage latéral prédite est enregistrée. Le modèle utilisé pour l'étude préliminaire est représenté à la Figure 2-21. Il s'agit d'une portion de fuselage incluant la peau, deux raidisseurs et un cadre. Le cadre est chargé en compression longitudinale. L'espacement entre les raidisseurs est de 6 po. Les dimensions du cadre (Figure 2-13) sont les dimensions moyennes utilisées dans plan d'expériences, soit :

- Longueur du cadre (a) : 18 po;
- Largeur des brides (h): 1 po;
- Hauteur de l'âme (b) : 3,6 po;
- Épaisseurs dans le cadre : 0,15 po.

Les raidisseurs sont en aluminium et ont les propriétés suivantes (voir Figure 2-16) :

- Longueur entre les cadres : 20 po;
- Largeur de bride interne : 0,35 po;
- Épaisseur de bride interne : 0,18 po;
- Hauteur de l'âme : 1,147 po;
- Épaisseur de l'âme : 0,08 po;
- Largeur de bride externe : 0,63 po;
- Épaisseur de bride externe : 0,07 po.

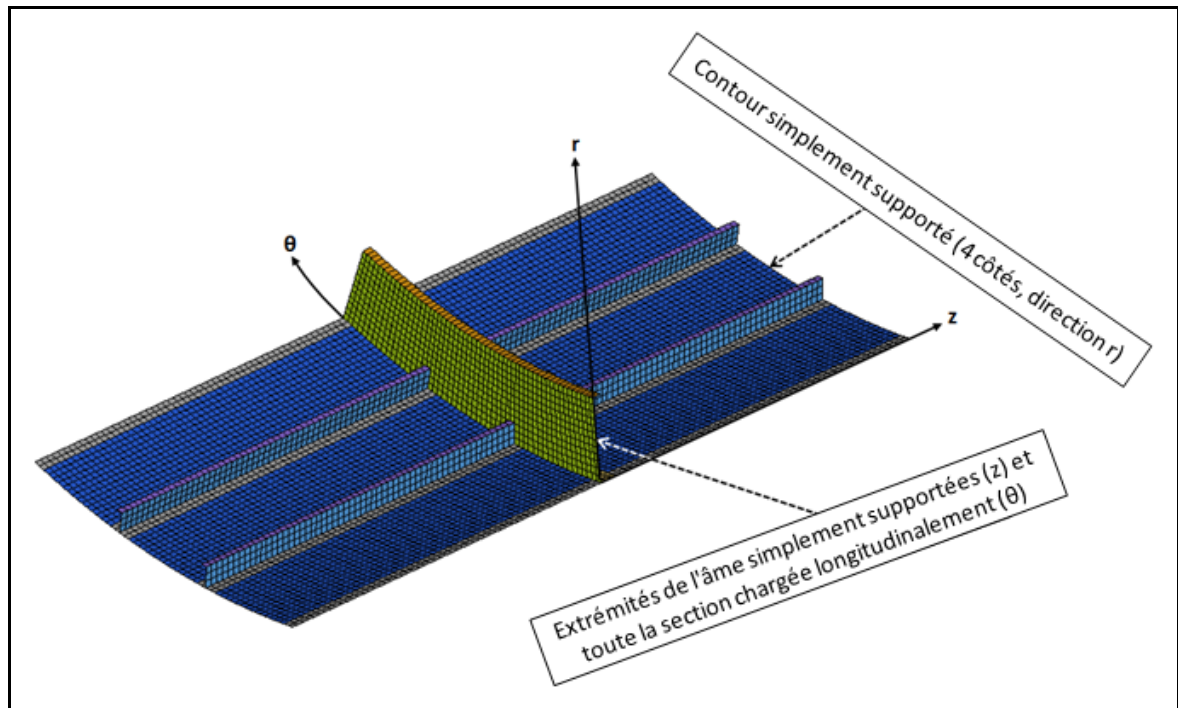


Figure 2-21 - Modèle d'éléments finis pour l'étude préliminaire

Analyse 1 – Modification des propriétés d'un matériau isotrope

La première analyse consiste à changer les propriétés du matériau du cadre tout en le gardant isotrope. Les propriétés du matériau sont initialement celles de l'aluminium ($E = 1,06E7$ psi, $G = 4,06E6$ psi) et elles sont graduellement changées vers les propriétés du titane ($E = 1,68E7$ psi, $G = 6,38E6$ psi). Les contraintes de flambage obtenues sont normalisées par rapport à la contrainte de flambage initiale pour l'aluminium. Pour cette analyse et pour les analyses qui suivent, le modèle est basé sur des rayons de fuselage de 53 po et de 1000 po. Le rayon de 1000 po est utilisé pour représenter un rayon infini. On peut ainsi observer si l'effet du changement de matériau sur la contrainte de flambage est le même avec et sans rayon de courbure. Les résultats sont présentés à la Figure 2-22. On peut voir que le changement de propriétés du matériau a exactement le même effet rigidifiant sur le cadre droit que sur le courbé. L'erreur maximale, soit la différence maximale entre les contraintes de flambage à rayon de 53 po et de 1000 po, est de 1,4% par rapport à la contrainte de flambage à 53 po.

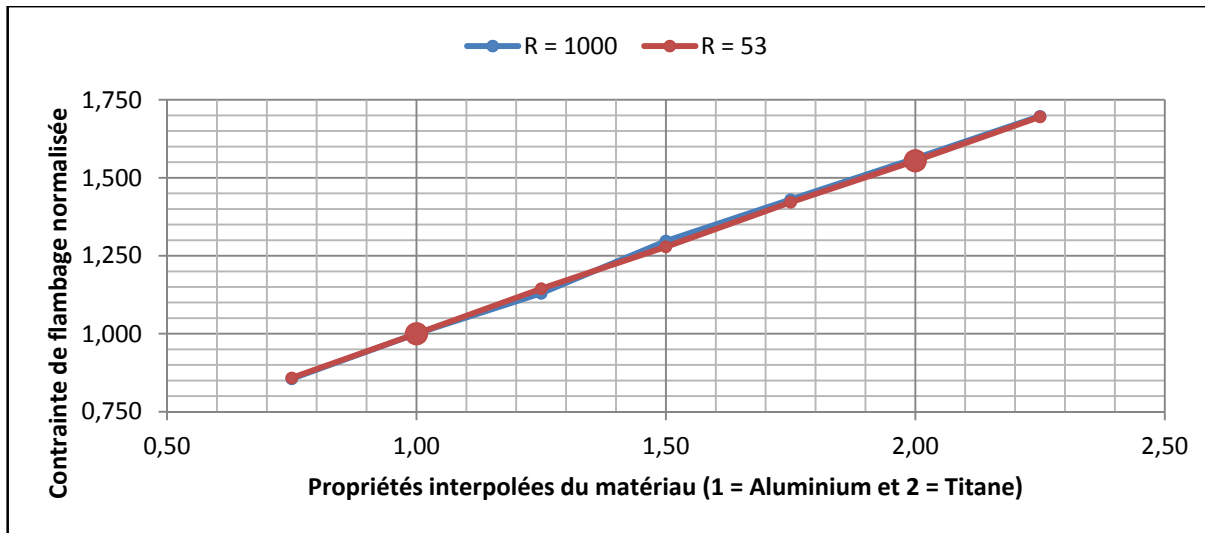


Figure 2-22 - Effet du changement de propriétés de matériau isotrope sur la contrainte de flambage normalisée

Analyse 2 - Modification des propriétés d'un matériau partiellement orthotrope

La deuxième analyse consiste à utiliser un matériau qui est initialement isotrope et le transformer graduellement en matériau orthotrope. Pour ce faire, on considère un stratifié de séquence d'empilement $[45/90/-45/0_5/45/90/-45/0_2]_s$. Au départ, les plis du stratifié sont isotropes et ils ont approximativement les propriétés de l'aluminium, soit un module de Young E_1 et E_2 de $1,00E7$ psi ainsi qu'un module de cisaillement G_{12} de $4,00E6$ psi. Le matériau isotrope est ensuite rendu orthotrope de trois façons différentes :

- En augmentant le module de Young E_1 jusqu'à trois fois la valeur initiale;
- En réduisant le module de Young E_2 jusqu'à un dixième de la valeur initiale;
- En réduisant le module de cisaillement G_{12} jusqu'à un dixième de la valeur initiale.

Les résultats sont présentés aux Figure 2-23, Figure 2-24 et Figure 2-25. Dans les trois cas, on voit que l'effet des changements de propriétés sur la contrainte de flambage est semblable pour le cadre droit et courbé. Les erreurs maximales obtenues, soit les différences maximales entre les contraintes de flambage à rayon de 53 po et de 1000 po, sont de 1,5%, 4,5% et 1,7%, respectivement. Les erreurs sont plus grandes quand on change le module de Young E_2 .

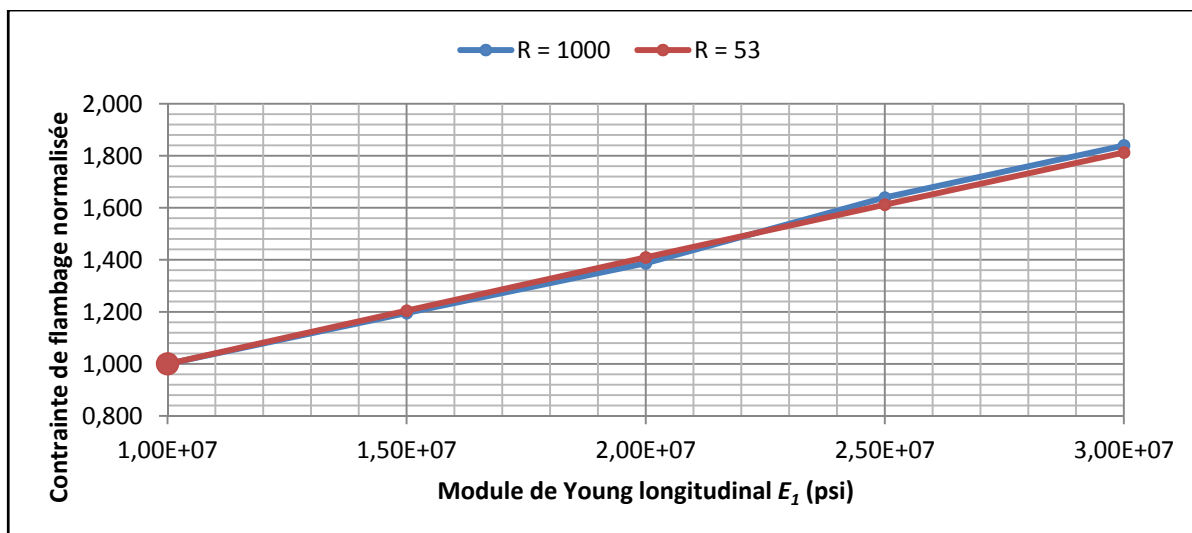


Figure 2-23 - Effet du changement de propriété de matériau (E_1) sur la contrainte de flambage normalisée

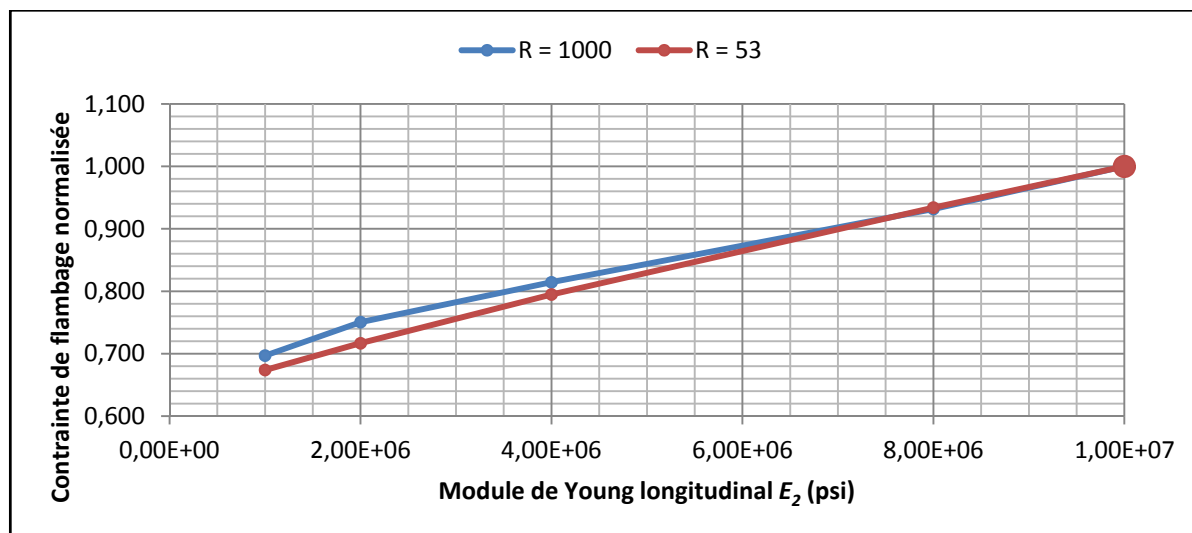


Figure 2-24 - Effet du changement de propriété de matériau (E_2) sur la contrainte de flambage normalisée

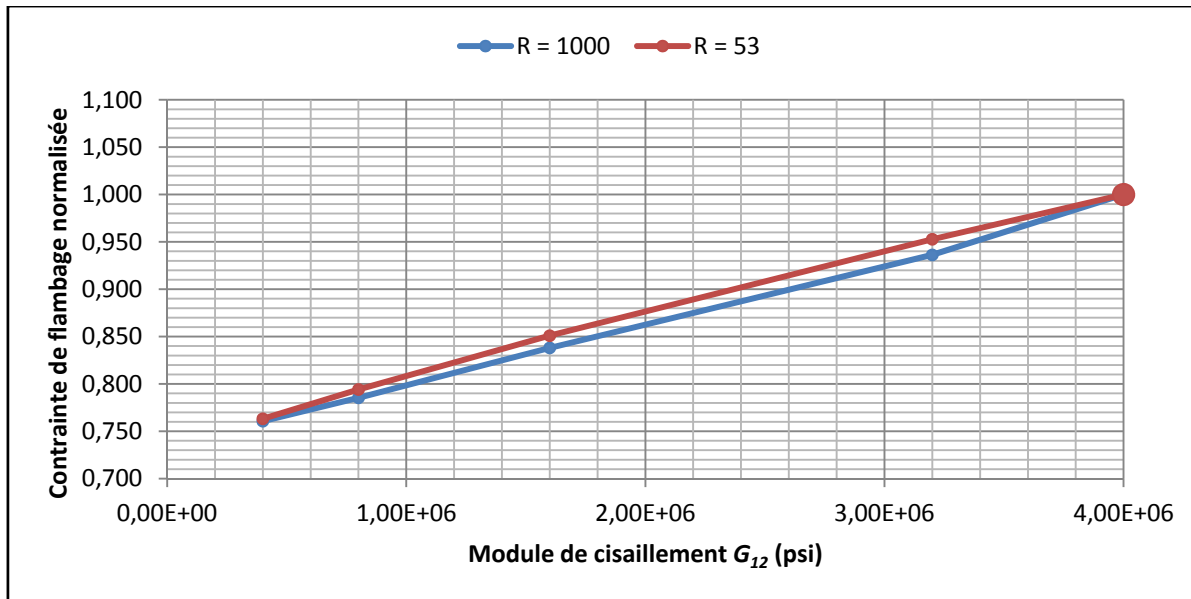


Figure 2-25 - Effet du changement de propriété matériau (G_{12}) sur la contrainte de flambage normalisée

Analyse 3 - Modification des propriétés d'un matériau, de l'aluminium vers le composite

La dernière analyse consiste à changer toutes les propriétés du matériau simultanément pour passer de l'aluminium à un composite de fibres de carbone et époxy. Les propriétés de l'aluminium sont les mêmes que présentées précédemment. Les propriétés du pli sont :

- $E_1 = 2,16E7$ psi;
- $E_2 = 1,46E6$ psi;
- $G_{12} = 6,6E5$ psi.
- $\nu_{12} = 0,33$

La séquence d'empilement du stratifié est encore une fois $[45/90/-45/0_5/45/90/-45/0_2]_s$. L'analyse permet de comparer les chargements de flambage latéral pour les deux matériaux étudiés et donc d'analyser l'erreur associée à l'hypothèse de la méthode du facteur matériau. Dans ce cas-ci, l'erreur, soit la différence maximale entre les contraintes de flambage à rayon de 53 po et de 1000 po, est de 5,6%. Les contraintes de flambage sont normalisées par rapport à la contrainte de flambage obtenue avec l'aluminium pour un rayon de 1000 po et de 53 po indépendamment. Les résultats sont présentés à la Figure 2-26. Cette erreur est probablement due au fait qu'avec le cadre droit, il y a plus de flambage local dans la peau du

fuselage qu'avec le cadre courbé. Un exemple de déformées du fuselage avec et sans courbure sont présentées à la Figure 2-27.

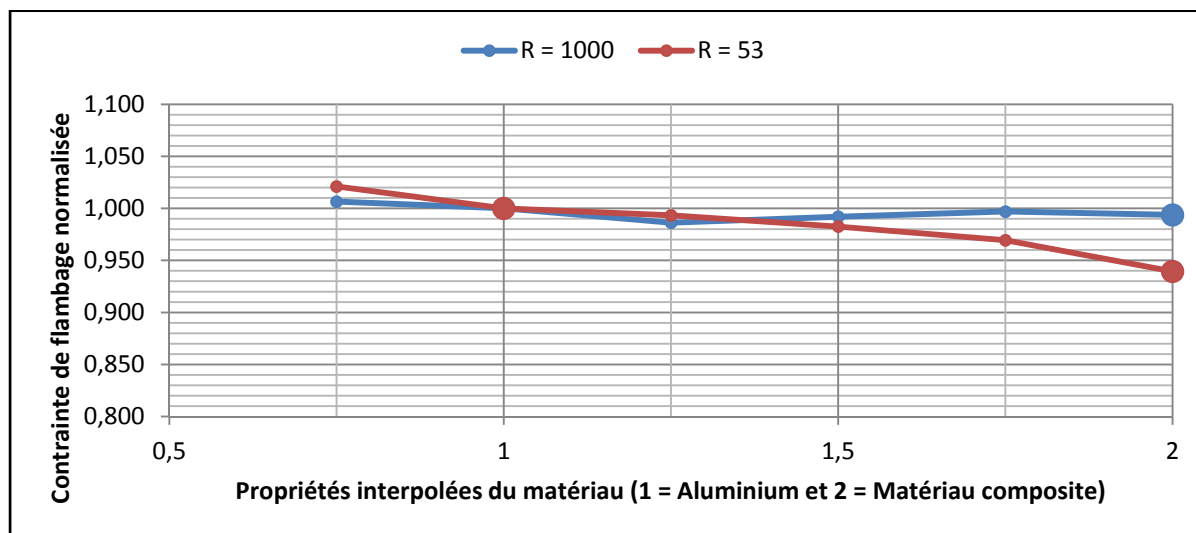


Figure 2-26 – Effet d'un changement des propriétés du matériau à l'aide d'une interpolation d'un matériau isotrope vers un matériau orthotrope

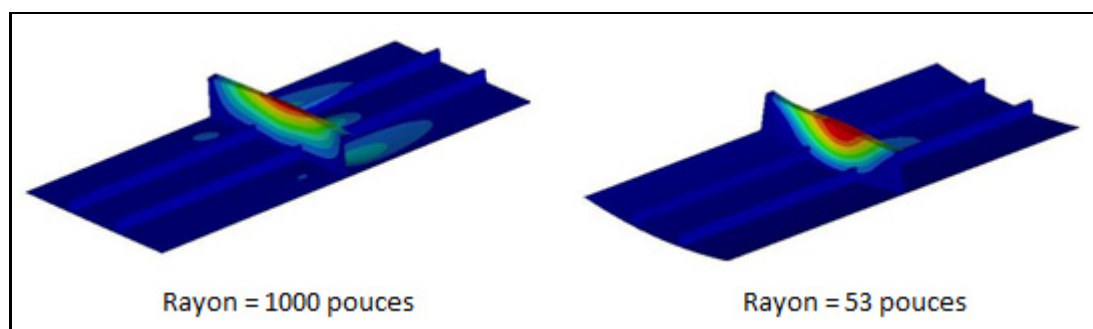


Figure 2-27 - Comparaison des déformées pour un fuselage avec et sans courbure, le cadre est chargé en compression longitudinale

2.2.4.2 Caractérisation des rigidités intermédiaires de l'ensemble peau et raidisseurs

La caractérisation des rigidités intermédiaires de l'ensemble peau et raidisseurs est nécessaire pour pouvoir utiliser la méthode du facteur matériau. La présente section démontre comment

sont obtenues les rigidités utilisées pour évaluer la méthode du facteur matériau dans la section suivante (section 2.2.4.1).

Le côté de l'âme situé qui est coïncidant avec l'ensemble peau et raidisseurs correspond à une condition frontière intermédiaire (entre simplement supporté et encastré). Cette section présente la méthode utilisée pour obtenir la rigidité équivalente en flexion de l'ensemble peau et raidisseurs. Cette rigidité équivalente correspond à la rigidité des ressorts de rotation utilisé dans la méthodologie analytique (R_R) pour le flambage latéral de cadre droit en matériau composite présenté à la section 2.2.3. Pour déterminer la rigidité des ressorts en rotation (R_R), deux modèles d'éléments finis ont été utilisés. Le premier modèle consiste en une section de fuselage sans rayon de courbure et sans bride interne (voir Figure 2-28). La section de fuselage et les extrémités du cadre sont simplement supportées aux frontières. Une charge est appliquée sur le côté de l'âme qui joint normalement la bride interne du cadre. Cette charge est uniformément répartie sur la longueur du segment et elle est appliquée latéralement, soit dans la direction z . Grâce à ce chargement, le cadre se déforme latéralement et une rotation se produit sur le segment de la jonction entre l'âme du cadre et la peau du fuselage.

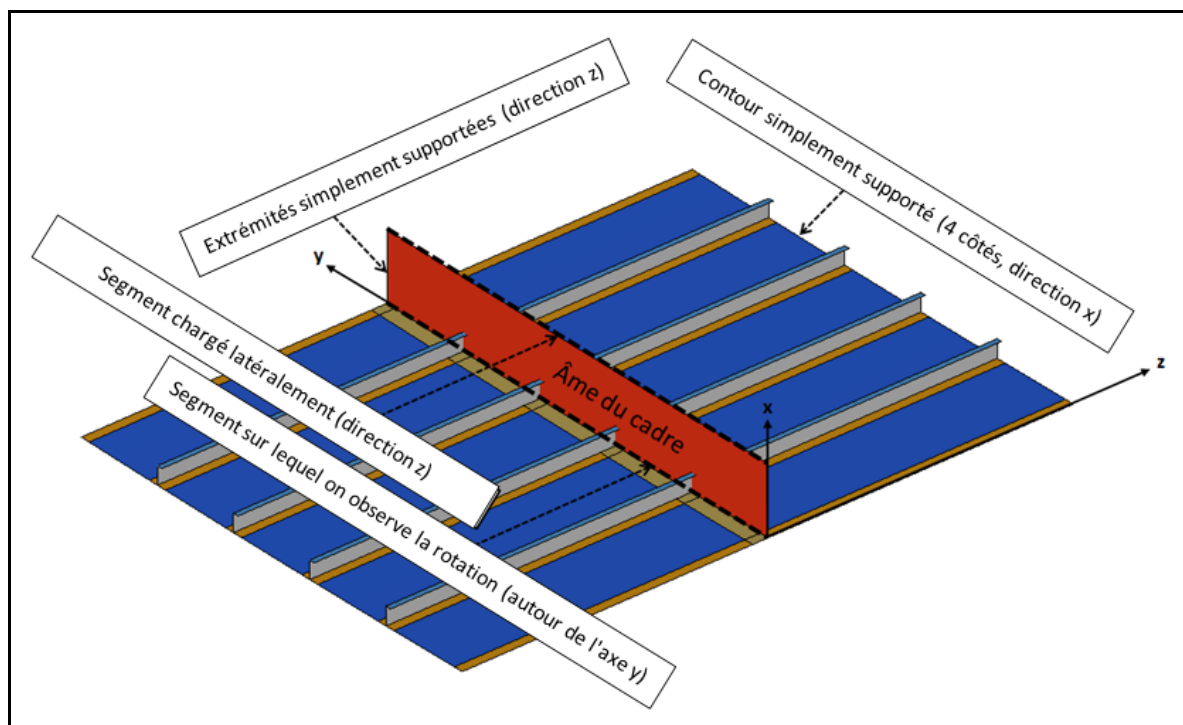


Figure 2-28 - Modèle de fuselage pour ressorts de rotation – Incluant l'ensemble peau-raidisateurs

Dans le deuxième modèle (voir Figure 2-29), la peau et les raidisseurs du fuselage sont remplacés par des ressorts en rotations autour de l'axe y. Un blocage dans la direction x est ajouté sur le segment où sont situés les ressorts de rotation. Encore une fois, on observe les rotations engendrées par le chargement latéral. Initialement, la rigidité des ressorts de rotation est choisie arbitrairement. Ensuite, cette rigidité est ajustée de façon itérative jusqu'à ce que les rotations moyennes dans les deux modèles soient égales. Après itérations, on obtient la rigidité équivalente des ressorts de rotation.

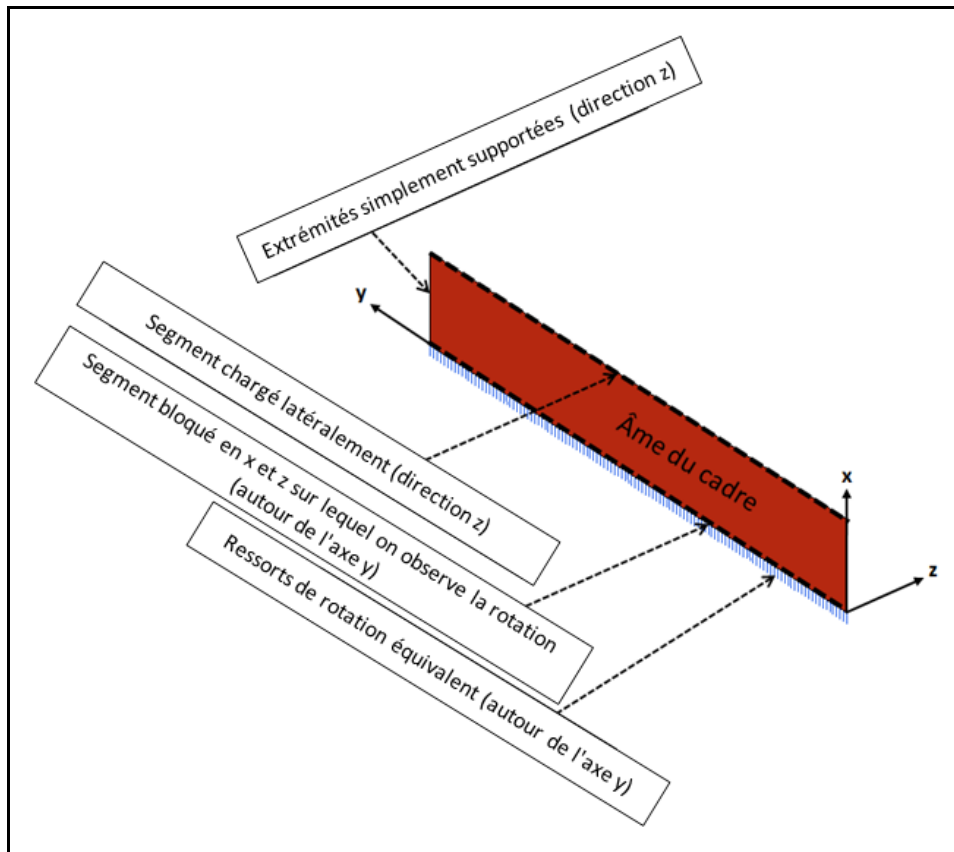


Figure 2-29 - Modèle d'âme de cadre avec ressorts équivalents

La Figure 2-30 montre un exemple de rotation obtenue après convergence des rotations moyennes des deux modèles. Dans cet exemple, le cadre a une longueur de 30 po et l'âme a une hauteur de 4,4 po. On voit très bien que la rotation observée est affectée par la présence des raidisseurs. Dans le cas du modèle avec les ressorts équivalents, la rotation est plus uniforme. L'allure des rotations des deux modèles est différente, mais leur rotation moyenne est identique.

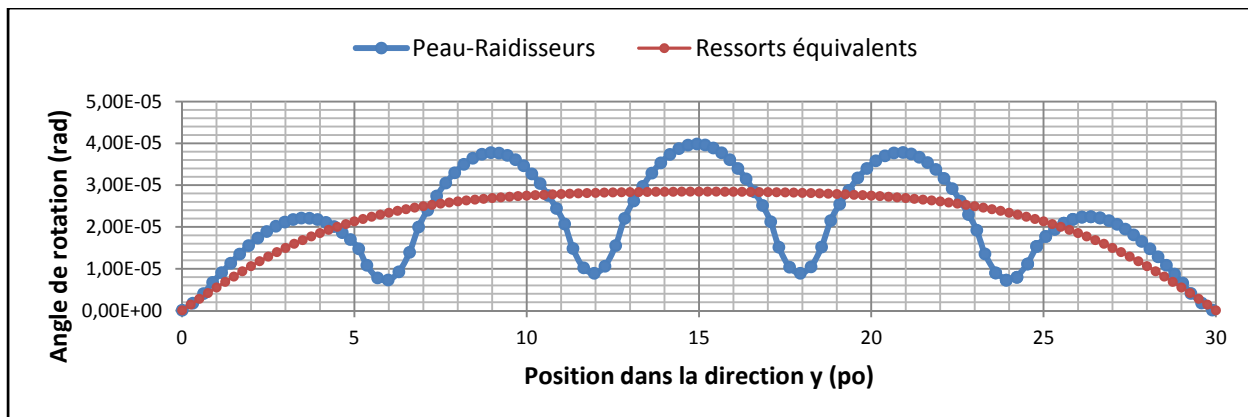


Figure 2-30 - Exemple de déformée : rotation du segment observé, longueur de cadre : 30 po, hauteur de l'âme : 4,4 po

La rigidité équivalente est principalement fonction de l'ensemble peau et raidisseurs. Ceux-ci sont inchangés pour tous les essais faits dans la présente étude. De plus, leurs dimensions sont les mêmes que dans l'étude préliminaire. Ils représentent un fuselage typique et moyen. Cependant, la rigidité équivalente dépend aussi de la longueur du cadre, de la hauteur de l'âme du cadre et du matériau du cadre. Comme ces paramètres sont variables, la rigidité équivalente a été obtenue pour toutes les configurations nécessaires (voir Tableau 2-14).

Tableau 2-14 - Rigidités des ressorts équivalents (R_R)

Dimensions de l'âme		Rigidité des ressorts	
Longueur	Hauteur	Aluminium	Composite
po	po	(lb po/rad)/po	(lb po/rad)/po
6	4,4	692,04	524,36
6	3,6	639,40	518,16
6	2,8	634,16	513,60
18	4,4	1199,04	965,92
18	3,6	1188,44	958,20
18	2,8	1169,36	943,80
30	4,4	1270,40	998,08
30	3,6	1230,68	992,84
30	2,8	1179,84	983,24

2.2.4.1 Évaluation de la méthode du facteur matériau

L'objectif principal dans la présente étude est d'évaluer la précision relative à la méthode du facteur matériau. Le facteur matériau est obtenu par la formulation analytique qui est exacte. L'erreur associée à son utilisation est donc due aux simplifications dans les paramètres d'entrée. La bride est simplifiée à trois rigidités de poutres et l'ensemble peau et raidisseurs est simplifié à des ressorts en rotation. Deuxièmement, la méthode des facteurs matériaux est basée sur l'hypothèse que l'effet d'un changement de matériau sur le flambage d'un cadre droit est le même que sur un cadre courbé. La validité de cette hypothèse et les erreurs associées ont été évaluées.

Le modèle d'éléments finis utilisé pour obtenir les résultats consiste en une section de fuselage (Figure 2-31). Le cadre inclut la bride interne. Les frontières de la section de fuselage sont simplement supportées. Le cadre est chargé avec une contrainte en compression uniforme dans la direction de θ . La peau et les raidisseurs sont en aluminium et le matériau du cadre est l'aluminium ou un matériau composite fibres de carbone/époxy. 27 configurations de cadres ont été testées, soit 12 configurations de cadre en « C » et 15 configurations de cadre en « I ». Les cadres ont été évalués de trois façons différentes, soit :

- Analytiquement pour des cadres droits;
- Par éléments finis pour des cadres droits;
- Par éléments finis pour des cadres courbés.

Pour chacune de ces trois évaluations, la contrainte de flambage a été obtenue pour des cadres en aluminium et en matériau composite. On calcule aussi le ratio du chargement de flambage pour des cadres en matériau composite sur le chargement de flambage pour des cadres en aluminium.

Pour faire une prédiction à l'aide de la méthode du facteur matériau, on commence par calculer le facteur matériau avec les résultats analytiques. On applique ensuite ce facteur sur le chargement des cadres courbés en aluminium pour obtenir la prédiction du chargement de

flambage pour les cadres courbés en matériaux composites. Le Tableau 2-15 présente tous les résultats et les erreurs associées.

Tableau 2-15 - Résultats pour l'analyse de la méthode du facteur matériau

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
N° Cas	Type de cadre	Dimensions (po)				Cadre analytique			FEM droit			FEM courbe			Méthode facteur matériau				
		Longueur de cadre	Rayon de fuselage	Largeur de bride	Hauteur d'âme	Contrainte de flambage latéral Aluminium (ksi)	Contrainte de flambage latéral Composite (ksi)	Facteur (Comp./Alu.)	Contrainte de flambage latéral Aluminium (ksi)	Contrainte de flambage latéral Composite (ksi)	Facteur (Comp./Alu.)	Contrainte de flambage latéral Aluminium (ksi)	Contrainte de flambage latéral Composite (ksi)	Facteur (Comp./Alu.)	Prediction Contrainte de flambage latéral	Erreur de prédiction (%)	Erreur de l'hypothèse (%)	Erreur analytique Aluminium (%)	Erreur analytique Composite (%)
1	C	6	53	0.5	4.4	52.4	41.8	0.80	41.8	35.0	0.84	42.6	33.8	0.79	34.0	0.5	5.4	25.3	19.4
2	C	6	53	1	3.6	98.5	72.5	0.74	82.6	65.2	0.79	83.1	61.6	0.74	61.2	-0.8	6.2	19.2	11.2
3	C	6	53	1.5	2.8	171.8	122.7	0.71	124.3	115.8	0.93	101.6	82.5	0.81	72.6	-12.1	13.7	38.2	6.0
4	C	18	53	0.5	4.4	19.6	19.6	1.00	20.4	16.2	0.79	17.5	16.2	0.93	17.6	8.5	-15.6	-4.2	21.5
5	C	18	53	1	3.6	73.0	72.0	0.99	50.8	53.6	1.06	45.6	45.1	0.99	45.0	-0.1	6.7	43.8	34.3
6	C	18	53	1.5	2.8	169.9	122.8	0.72	82.8	77.4	0.94	81.4	79.7	0.98	58.8	-26.2	-4.5	105.3	58.6
7	C	30	53	0.5	4.4	21.3	17.2	0.81	20.2	19.2	0.95	13.3	10.8	0.81	10.7	-0.6	15.7	5.7	-10.2
8	C	30	53	1	3.6	45.4	45.9	1.01	37.8	37.4	0.99	27.5	25.2	0.92	27.8	10.3	7.3	19.9	22.9
9	C	30	53	1.5	2.8	96.7	107.4	1.11	65.7	58.3	0.89	49.0	45.7	0.93	54.4	19.1	-5.0	47.2	84.3
10	C	18	60	0.5	4.4	19.6	19.6	1.00	20.4	18.2	0.89	17.8	16.5	0.92	17.9	8.9	-3.6	-4.2	8.1
11	C	18	50	0.5	4.4	19.6	19.6	1.00	20.4	18.2	0.89	17.4	16.1	0.93	17.5	8.4	-4.1	-4.2	8.1
12	C	18	40	0.5	4.4	19.6	19.6	1.00	20.4	18.2	0.89	16.7	15.6	0.93	16.8	8.0	-4.4	-4.2	8.1
Moyenne cadre en « C »						67.3	56.7	0.91	49.0	44.4	0.90	42.8	37.4	0.89	36.2	2.0	1.5	24.0	22.7
13	I	18	53	1	4.4	22.3	24.1	1.08	24.6	26.3	1.07	23.8	24.6	1.03	25.7	4.4	3.6	-9.2	-8.5
14	I	18	53	0.5	4.4	12.4	10.2	0.82	17.1	13.3	0.78	12.9	10.5	0.82	10.5	0.2	-5.0	-27.4	-23.6
15	I	18	53	2	4.4	69.2	50.7	0.73	67.8	48.3	0.71	64.3	46.9	0.73	47.1	0.3	-2.5	2.1	5.0
16	I	18	53	1	3.6	28.3	29.1	1.03	26.0	28.9	1.11	29.3	29.2	1.00	30.1	3.1	10.8	8.8	0.7
17	I	18	60	1	3.6	28.3	29.1	1.03	26.0	28.9	1.11	29.9	29.8	1.00	30.7	3.2	10.9	8.8	0.7
18	I	18	50	1	3.6	28.3	29.1	1.03	26.0	28.9	1.11	29.0	28.9	1.00	29.8	3.0	10.7	8.8	0.7
19	I	18	40	1	3.6	28.3	29.1	1.03	26.0	28.9	1.11	27.7	27.6	1.00	28.5	3.2	10.9	8.8	0.7
20	I	18	53	1.5	3.6	51.0	59.7	1.17	52.7	58.4	1.11	50.4	50.6	1.00	59.0	16.7	10.1	-3.2	2.2
21	I	18	53	2.5	2.8	149.7	125.2	0.84	NA	NA	NA	110.1	118.7	1.08	92.1	-22.4	NA	NA	NA
22	I	30	53	0.5	4.4	12.5	10.8	0.87	15.0	12.4	0.83	8.5	7.4	0.87	7.4	0.0	-4.8	-16.8	-12.7
23	I	30	53	1.5	3.6	34.0	32.8	0.96	32.7	31.1	0.95	26.7	25.3	0.95	25.7	1.5	0.1	4.0	5.4
24	I	30	53	2.5	2.8	75.3	83.1	1.10	83.2	85.7	1.03	58.2	53.2	0.91	64.2	20.6	11.9	-9.4	-3.0
25	I	6	53	0.5	4.4	27.0	27.7	1.02	27.7	27.8	1.00	30.3	28.9	0.96	31.0	7.1	4.9	-2.4	-0.5
26	I	6	53	1.5	3.6	100.5	73.8	0.73	60.2	62.6	1.04	123.9	122.8	0.99	91.0	-25.9	4.8	66.9	17.9
27	I	6	53	2.5	2.8	173.8	126.4	0.73	123.9	109.8	0.89	NA	NA	NA	NA	NA	NA	40.3	15.1
Moyenne cadre en « I »						56.1	49.4	0.9	43.5	42.2	1.0	44.6	43.2	1.0	40.9	1.1	5.1	5.7	0.0
Moyenne globale						61.0	52.7	0.9	45.9	43.2	1.0	43.8	40.6	0.9	38.8	1.5	3.5	13.8	10.1

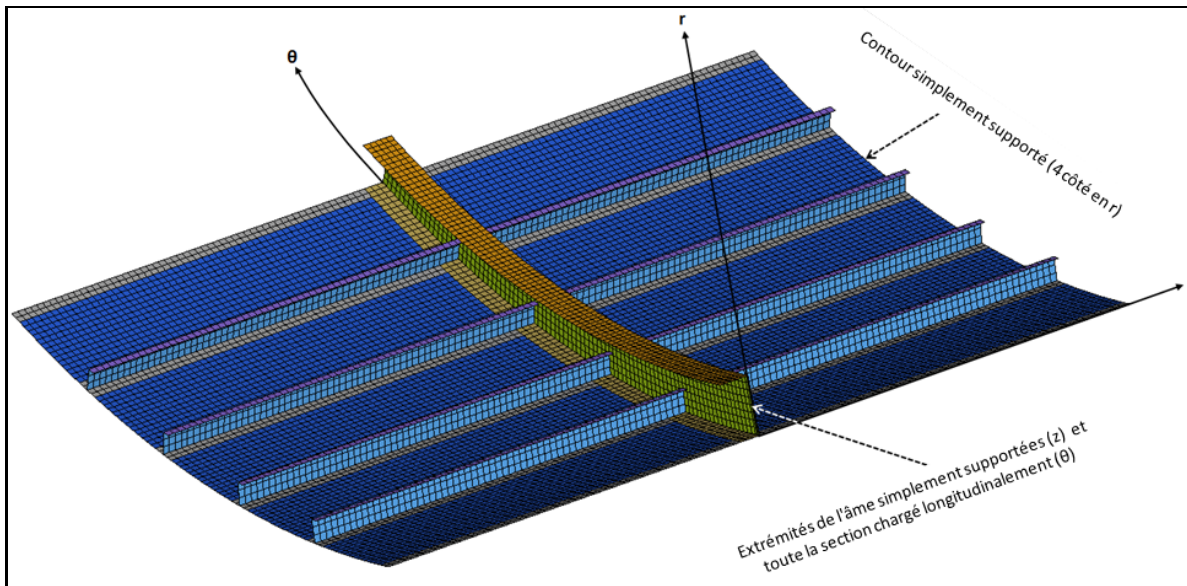


Figure 2-31 – Modèle éléments finis de fuselage avec cadre en compression

L'erreur analytique

Le Tableau 2-15 présente une comparaison des résultats obtenus analytiquement et à l'aide des éléments finis pour le flambage latéral de cadres. Les chargements de flambage latéral analytiques pour les cadres en « C » sont, en moyenne, plus élevés que ceux obtenus par éléments finis (Colonnes G et H). Une des raisons expliquant cette différence est que la méthode analytique a été développée pour des cadres en « I »; elle ne tient donc pas compte de l'effet d'avoir une bride asymétrique sur l'âme. Une bride asymétrique influence la distribution de contraintes et cause un déplacement latéral avant le flambage. Pour cette raison, le chargement de flambage latéral des cadres en « C » est en réalité plus faible que celui prévu analytiquement. Avec les cadres en « C » qui ont été testés, les erreurs entre les prédictions analytiques (Colonne G et H) et les éléments finis (Colonnes J et K) sont en moyennes de 24% et de 23% pour les cadres en aluminium et en matériau composite, respectivement (Colonnes S et T). Dans le cas des cadres en « I », les erreurs entre les prédictions analytiques et éléments finis sont en moyennes de 5,7% et 0% (Colonnes S et T).

L'erreur de l'hypothèse

Les résultats permettent d'évaluer l'hypothèse sur laquelle est fondée la méthode de facteur matériau en observant l'erreur entre les facteurs matériaux des cadres droits (Colonne L) et les facteurs matériaux des cadres courbes (Colonne O). La majorité des erreurs de ce type sont inférieures à 10% et les erreurs maximales répertoriées sont de 15,7% et 11,9% pour les cadres en « C » et en « I », respectivement (Colonne R). Ces erreurs montrent que l'hypothèse est partiellement confirmée. Cependant, les erreurs sur les facteurs étant de l'ordre de 10%, elles ne sont donc pas négligeables.

L'erreur de prédiction

Finalement, la méthode est évaluée dans son ensemble. L'erreur de prédiction se définit comme l'erreur entre la contrainte de flambage latéral faite à l'aide de la méthode du facteur matériau (Colonne P) et la contrainte de flambage latéral obtenue par éléments finis (Colonne N). La majorité des erreurs de prédiction sont inférieures à 10% et 8% pour les cadres en « C » et en « I », respectivement (Colonne Q). Des erreurs de prédiction entre 10% et 30% sont également obtenues dans les cas où la largeur de la bride est grande par rapport à la hauteur de l'âme du cadre (les cas numéro 6, 9, 21, 24 et 26). Dans ces cas, le chargement de flambage est relativement grand et on obtient alors beaucoup de flambage local dans la peau. Le flambage local dans la peau affaiblit le chargement de flambage du cadre dans le modèle d'éléments finis, mais il n'est pas présent dans la formulation analytique. Par contre, comme le chargement de flambage obtenu est relativement grand par rapport à la limite de rupture matériau, ces cas ne sont pas aussi pertinents que les autres et les erreurs de prédiction obtenues sont donc acceptables. La Figure 2-32 montre un mode de flambage obtenu avec le cas numéro 9 (Tableau 2-15). On y voit le douzième mode de flambage, qui est du flambage local dans la peau. Cette configuration est un exemple de cadre avec une bride large et une âme étroite. Les premiers modes de flambage sont des modes locaux dans la peau mais le mode qui nous intéresse est le flambage dans l'âme du cadre. Ce mode de flambage dans l'âme est le 19e mode et il est présenté à la Figure 2-33. Même si le mode est principalement latéral, il comporte aussi du flambage local dans la peau, ce qui affaiblit la structure du modèle d'éléments finis. L'erreur de prédiction pour ce cas est de 19,1%. Bref, les erreurs de

prédiction montrent que la méthode du facteur matériau est acceptable mais pourrait être améliorée dans des travaux futurs. Lorsque la largeur de la bride n'est pas trop grande par rapport à la hauteur de l'âme (cas 6, 9, 21, 24 et 26), on peut s'attendre à avoir des erreurs inférieures à 10%.

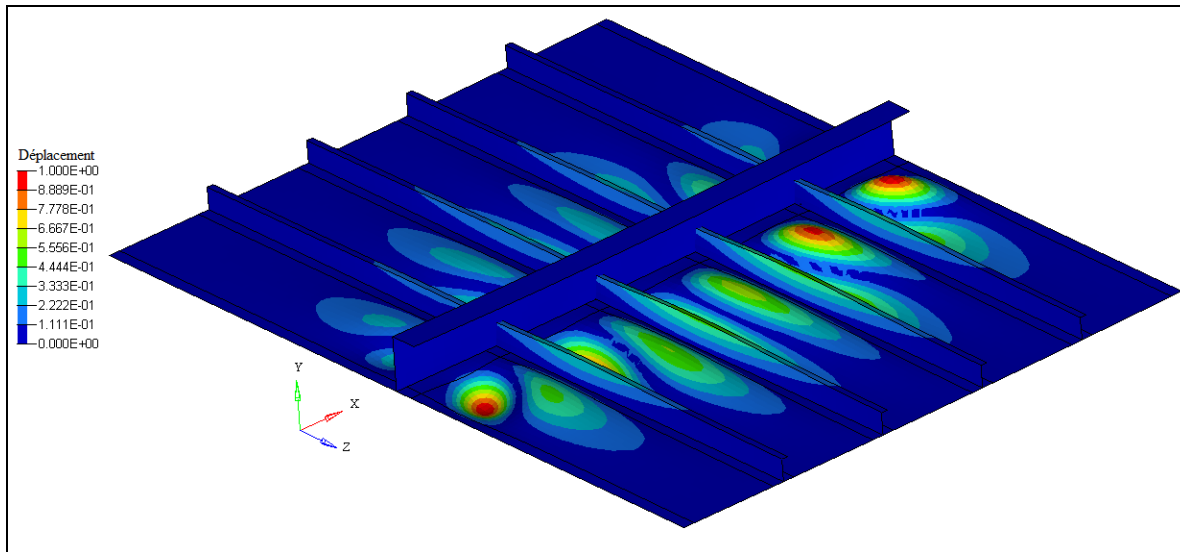


Figure 2-32 - Exemple de mode de flambage avec le cas n°9, 12e mode, principalement flambage local dans la peau

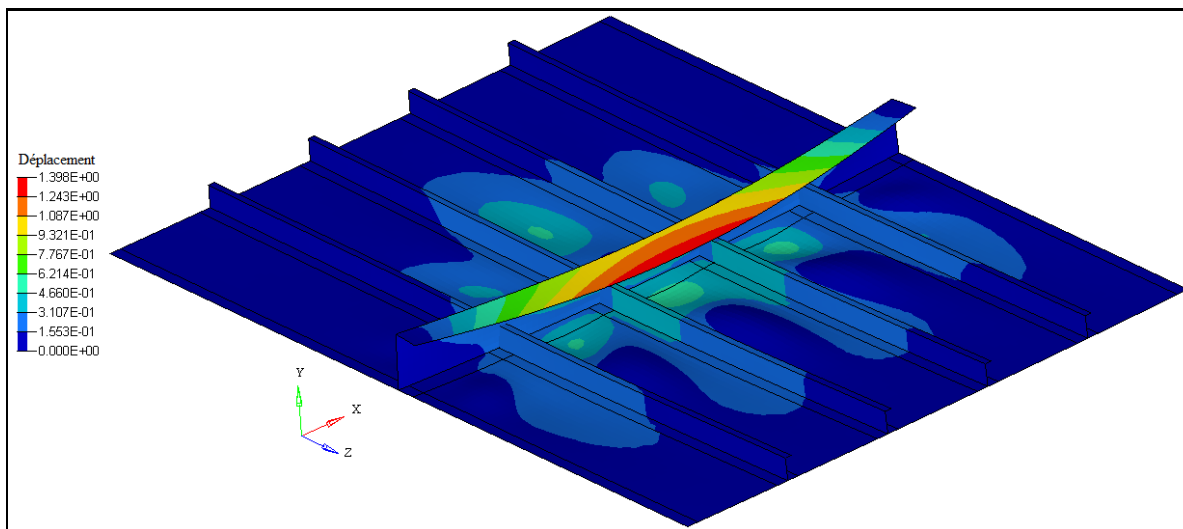


Figure 2-33 - Exemple de mode de flambage avec le cas n°9, 19e mode, principalement latéral mélangé avec local dans la peau

CHAPITRE 3

Intégration des critères et conception de l'outil

Le présent chapitre décrit l'outil de dimensionnement de cadre. Cet outil est au stade conceptuel et il devra être codé et évalué en détail dans des travaux futurs. Différents critères de dimensionnement forment le cœur de l'outil et des marges de sécurité sont calculées suite à l'évaluation de ces critères. Le dimensionnement d'un cadre peut se résumer à minimiser les marges de sécurité associées aux différents critères de rupture tout en les gardant supérieures à des cibles prédéterminées. En plus des critères de rupture, certaines règles de dimensionnement propres à l'industrie doivent être respectées. Plusieurs de ces règles sont des limites à ne pas dépasser pour les paramètres d'entrée. D'autres règles permettent de garder des proportions logiques entre certains paramètres géométriques. Bien que ce soit le cadre qui soit dimensionné, les raidisseurs et la peau sont également considérés dans la plupart des critères de dimensionnement. Ainsi, la structure étudiée est souvent une section du fuselage plutôt qu'un cadre seul (Figure 3-1).

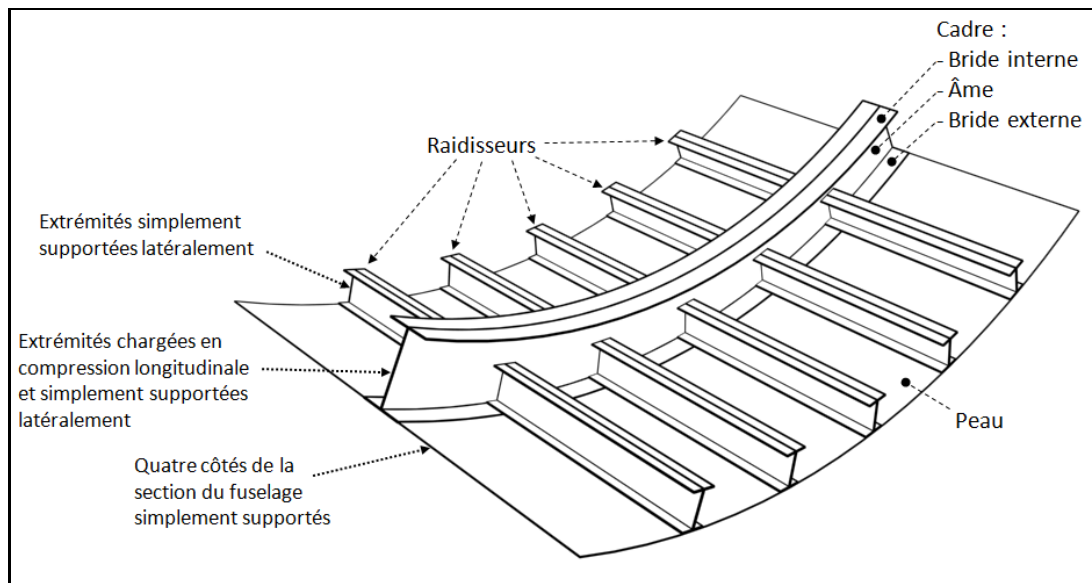


Figure 3-1 - Section de fuselage incluant un cadre à dimensionner

Lors du dimensionnement, des compromis sont faits entre les différents phénomènes de défaillance afin d'obtenir un cadre qui résiste à tous les cas de chargement appliqués tout en étant le plus léger possible. Pour y parvenir, il faut :

- connaître tous les phénomènes de défaillance qui peuvent s'appliquer au cadre ;
- calculer les marges de sécurité associées à chaque phénomène de défaillance ;
- modifier le cadre pour réduire son poids tout en conservant des marges de sécurité suffisantes.

3.1 Les critères de dimensionnement

Un critère de dimensionnement est formulé pour chaque mode de défaillance :

- Rupture matériau;
- Flambage local;
- Crippling;
- Flambage latéral;
- Flambage global.

Afin de pouvoir calculer les marges de sécurité associées à chacun des critères, une revue de littérature a été faite pour recueillir les formulations analytiques existantes (Chapitre 1). Pour certains critères, de nouvelles formulations ont été développées (Chapitre 2). Certaines de ces formulations ont été comparées à des simulations par éléments finis. Le Tableau 3-1 montre le travail qui a été fait pour chaque critère de dimensionnement.

Tableau 3-1 - Travail fait sur les critères de dimensionnement

Critères	Revue de littérature	Comparer/évaluer les formulations	Développer de nouvelles formulations	Plan d'expérience
Rupture matériau	X	X		
Flambage local	X		X	
Crippling	X			
Flambage latéral	X	X	X	X
Flambage global	X			

3.2 Les paramètres d'entrée

Les paramètres d'entrée de l'outil de dimensionnement sont séparés en deux groupes, soit les paramètres de rupture matériau et ceux des instabilités. Ces deux groupes sont présentés aux Tableau 3-2 et Tableau 3-3, respectivement.

Plusieurs modèles de rupture matériau sont incorporés dans l'outil de dimensionnement. L'utilisateur doit dans un premier temps choisir quels modèles il utilisera pour prédire la rupture du matériau composite. Ainsi, seuls les paramètres d'entrée nécessaires aux modèles choisis seront utilisés. Au niveau des instabilités, tous les critères sont vérifiés, car il s'agit ici de phénomènes différents. Les paramètres à connaître pour les critères d'instabilité sont moins nombreux que pour la rupture matériau et ils sont plus faciles à obtenir. Il s'agit des chargements appliqués, des dimensions et des propriétés mécaniques des stratifiés du cadre.

Tableau 3-2 - Paramètres d'entrée pour rupture matériau

Paramètre		Modèle de rupture matériau					
		Déformation maximale	Contrainte maximale	T sai-Hill	T sai-Wu	Puck	Cuntze
Variable	Définition						
	Chargement appliqué						
	Déformation						
ε_1	longitudinalement	x				x	
ε_2	transversalement	x					
γ_{12}	en cisaillement	x					
	Contrainte						
σ_1	longitudinalement		x	x	x		x
σ_2	transversalement		x	x	x	x	x
σ_3	hors-plan						x
σ_{12}	en cisaillement plan 1-2		x	x	x	x	x
σ_{23}	en cisaillement plan 2-3						x
σ_{31}	en cisaillement plan 3-1						x
	Propriétés matériau						
	Déformation maximale permise						
ε_L	longitudinalement en tension	x					
$\varepsilon_{L'}$	longitudinalement en compression	x					
ε_T	transversalement en tension	x					
$\varepsilon_{T'}$	transversalement en compression	x					
γ_{LT}	en cisaillement positif	x					
$\gamma_{LT'}$	en cisaillement négatif	x					
	Contrainte maximale permise						
σ_L	longitudinalement en tension		x	x	x	x	x
$\sigma_{L'}$	longitudinalement en compression		x		x	x	x
σ_T	transversalement en tension		x	x	x	x	x
$\sigma_{T'}$	transversalement en compression		x		x	x	x
σ_{LT}	en cisaillement positif		x	x	x	x	x
$\sigma_{LT'}$	en cisaillement négatif		x		x		
	Propriétés du laminé						
E_{11}	module de Young longitudinal du laminé					x	
E_{f1}	module de Young longitudinal des fibres					x	
F_{12}	Facteur d'interaction longitudinal-transverse				x		
ν_{f12}	Coefficient de poisson des fibres					x	
m_{af}	Facteur d'amplification moyen					x	
	Pente de surface de rupture						
$p_{\perp\parallel}^{(-)}$	perpendiculaire-longitudinal positif					x	
$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	perpendiculaire-longitudinal négatif					x	
$p_{\perp\perp}^{(-)}$	perpendiculaire-perpendiculaire positif					x	
$p_{\perp\perp}^{(+)}$	perpendiculaire-perpendiculaire négatif					x	
	Paramètre b						
$b_{\perp\parallel}$	perpendiculaire-parallèle						x
b_{\perp}^{τ}	cisaillement, perpendiculaire						x
$b_{\perp\parallel}^{\tau}$	cisaillement, perpendiculaire-parallèle						x

Tableau 3-3 - Paramètres d'entrée pour les instabilités

		Critères d'instabilité			
		Flambage local	Crippling	Flambage latéral	Flambage global
Paramètre					
Variable	Définition				
	Chargement appliqué				
N_x	Compression longitudinale sur le cadre	x	x	x	
N_{xy}	Cisaillement dans l'âme du cadre	x			
M	Moment de flexion sur le fuselage				x
	Dimensions				
a	Longueur du cadre	x		x	
h	Largeur de la bride interne gauche	x	x	x	x
t_i	Épaisseur de la bride interne		x		
b	Hauteur de l'âme	x	x	x	x
t_a	Épaisseur de l'âme		x		
B	Largeur de la bride externe gauche		x	x	x
t_e	Épaisseur de la bride externe		x		
S	Espacement des cadres				x
R	Rayon de courbure			x	x
	Laminé de la bride interne				
	Propriété d'un pli (E_1, E_2, G_{12}, t)			x	
	Séquence d'empilement			x	
	Matrice D	x			x
	Contrainte ultime en compression longitudinale		x		
	Laminé de l'âme				
	Propriété d'un pli (E_1, E_2, G_{12}, t)			x	
	Séquence d'empilement			x	
	Matrice D	x			x
	Contrainte ultime en compression longitudinale		x		
	Laminé de la bride externe				
	Contrainte ultime en compression longitudinale		x		
	Propriété du fuselage				
	Rigidité en flexion de peau-raideurs			x	

3.3 Les règles de dimensionnement

Toutes les composantes du fuselage ne sont pas dimensionnées simultanément. Les cadres et autres composantes du fuselage sont dimensionnés à tour de rôle et le fuselage est optimisé par itération en prenant soins de bien ajuster les charges internes à chaque itération. Lors du dimensionnement d'un cadre, certains paramètres sont fixés alors que d'autres sont libres pour permettre d'optimiser le cadre et les marges de sécurité. Les valeurs des paramètres libres sont gardées à l'intérieur d'un intervalle. De plus, certaines proportions entre les paramètres doivent aussi être respectées. Les choix de paramètre fixes, de paramètres libres

et de limites constituent une liste de règles de dimensionnement qui peut facilement être modifiée et améliorée. Les règles de dimensionnement sont présentées ici à titre d'exemple.

3.3.1 Paramètres fixes

Les paramètres fixes sont principalement ceux décrivant le fuselage :

- Le rayon de courbure du fuselage;
- La configuration peau-raidisateurs;
- Les chargements appliqués;
- Le type de cadre (« C » ou « I »);
- La longueur du cadre;
- Les choix de matériaux;
- Les séquences d'empilement.

L'approche conseillée est de fixer ces paramètres et de faire le dimensionnement des cadres du fuselage en utilisant l'outil de dimensionnement. Ensuite les paramètres fixes peuvent être ajustés si nécessaire avant de refaire une ou plusieurs itérations de dimensionnement.

3.3.2 Limite absolue (intervalle)

Les paramètres variables comportent des limites, c'est-à-dire des valeurs minimale et maximale à ne pas dépasser. Les paramètres variables sont :

- La hauteur de l'âme;
- L'épaisseur de l'âme;
- La largeur de la bride interne;
- L'épaisseur de la bride interne;
- La largeur de la bride externe;
- L'épaisseur de la bride externe.

Les limites sur les paramètres variables permettent d'éviter d'obtenir des configurations qui ne sont pas réalistes ou qui ne sont pas fabricables.

3.3.3 Limite relative

Les paramètres variables doivent être également limités proportionnellement à d'autres paramètres. Par exemple, il serait complètement irréaliste d'avoir une bride plus large que la moitié de l'espacement entre deux cadres. C'est pourquoi la largeur de la bride devrait être limitée à la moitié de l'espacement entre les cadres. Quelques limites relatives ont été identifiées par rapport aux dimensions de la section du cadre (voir Figure 3-1):

- Largeur de bride interne / hauteur d'âme $> 0,25$;
- Largeur de bride externe / hauteur d'âme $> 0,25$;
- Largeur de bride interne / espacement entre les cadres $< 0,5$;
- Largeur de bride externe / espacement entre les cadres $< 0,5$.

Les limites précédentes sont données à titre d'exemple. Il existe une multitude de limites possibles et il en revient à l'utilisateur de bien les identifier. De plus, les valeurs des limites précédentes sont aussi données en exemples et pourront éventuellement être ajustées. Ces valeurs ont été choisies de façon à représenter les proportions utilisées en industrie.

3.3.4 Les marges de sécurité

A priori, les marges doivent toutes être minimisées mais gardées positives. Cependant, comme certains phénomènes de défaillance sont plus critiques que d'autres, il est préférable de garder certaines marges supérieures à d'autres.

Par exemple, les valeurs suivantes permettraient d'assurer un ordre d'occurrence à travers les différents phénomènes de défaillance :

- Marge pour le flambage local > 0 ;
- Marge pour la rupture matériau $> 0,25$;
- Marge pour le flambage latéral $> 0,25$;
- Marge pour le crippling $> 0,5$;
- Marge pour le flambage global $> 0,5$.

Le flambage local est rarement un mode de défaillance ultime et il est souvent réversible; sa marge peut donc être minimisée jusqu'à zéro. Cependant, les autres marges sont classées en deux groupes, soit les modes de défaillance irréversibles et les modes de défaillance catastrophiques. Ces modes peuvent être minimisés jusqu'à des valeurs de 0,25 et 0,5, respectivement. Ces valeurs sont encore une fois données à titre d'exemple et peuvent être ajustées au besoin.

3.4 Fonctionnement de l'outil

L'outil fonctionne par itérations jusqu'à ce que le cadre soit considéré comme étant optimisé. À chaque itération, des ajustements de plus en plus faibles sont faits sur la géométrie du cadre. À la première itération, des valeurs de paramètres fixes et paramètres variables initiales sont choisies. Puis, les marges de sécurité sont calculées pour chacun des critères de dimensionnement. En fonction des marges obtenues, des ajustements sont faits sur les paramètres variables pour tenter de se rapprocher du cadre optimal, et ce, en respectant les règles de dimensionnement. En analysant les marges de sécurité obtenues, on peut déduire quels sont les ajustements qui permettront d'améliorer les marges de sécurité. Par exemple, pour augmenter la marge de sécurité du flambage latéral, on peut augmenter la largeur ou l'épaisseur de la bride interne pour donner plus de support à l'âme. La Figure 3-2 montre le schéma du fonctionnement de l'outil de dimensionnement.

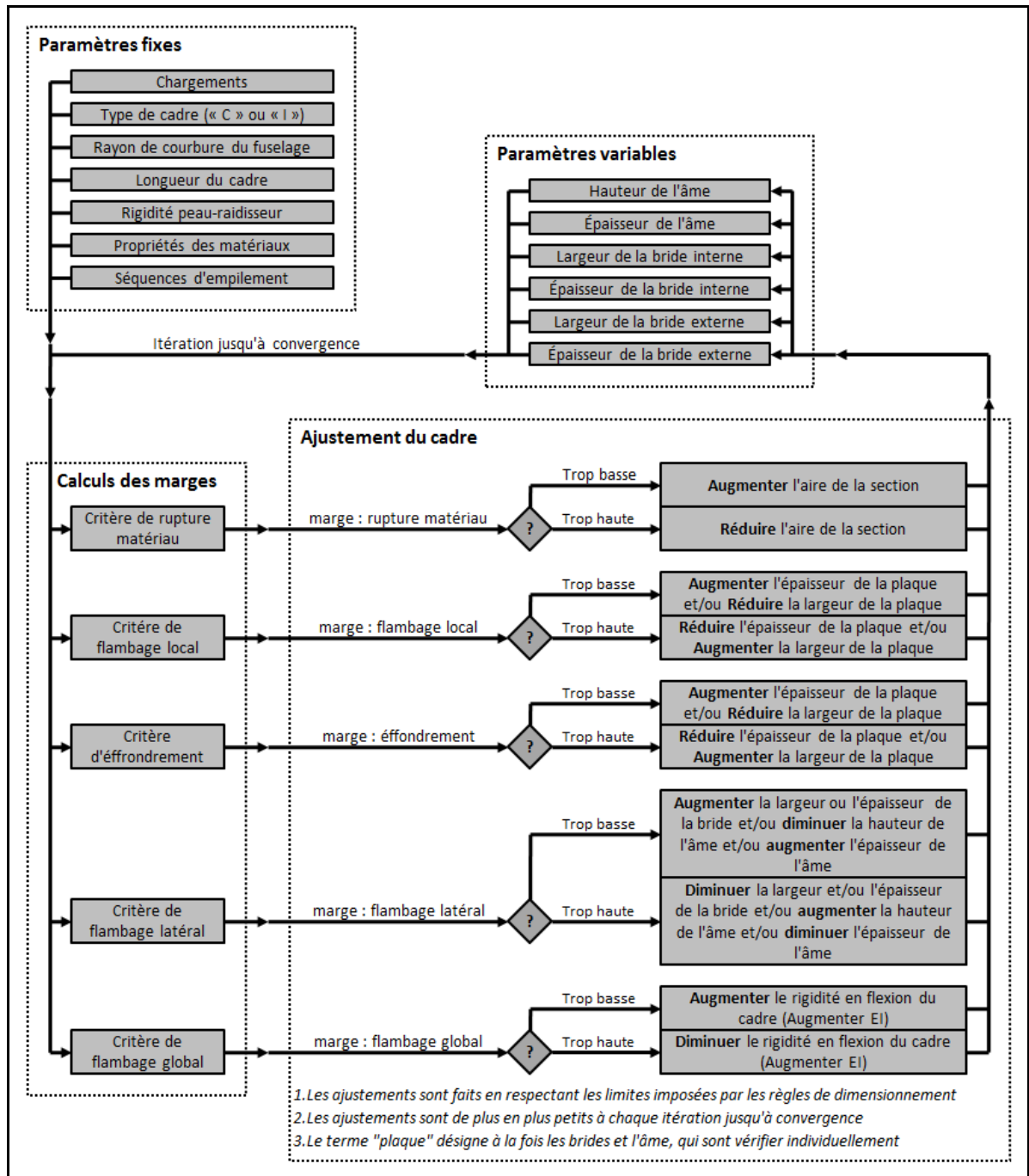


Figure 3-2 - Fonctionnement de l'outil de dimensionnement

3.5 Les limitations

Afin de simplifier le calcul des différentes marges de sécurité, plusieurs hypothèses sont faites :

- Seuls les modes de défaillance couverts par les critères de dimensionnement sont vérifiés.
- Lorsqu'une longueur finie du cadre est considérée, les extrémités de celui-ci sont supposées supportées par des supports latéraux rigides.
- Lorsqu'une section de fuselage est considérée, les conditions frontières de cette section sont simplement supportées.
- Les raidisseurs et les cadres sont continus et indépendants, c'est-à-dire qu'aucune jonction n'est considérée entre les raidisseurs et les cadres (Figure 3-1).
- Les raidisseurs et les cadres sont parfaitement soudés à la peau du fuselage (aucun joint boulonné).
- La section du cadre est constante sur toute sa longueur.
- L'espacement entre les raidisseurs est constant.
- L'espacement entre les cadres est constant.
- Le rayon de courbure du fuselage est constant.
- Les séquences d'empilement des stratifiés sont symétriques et équilibrées.
- Les dégagements faits dans le cadre pour faire passer les raidisseurs sont inexistant.
- Le phénomène de délamination dans le matériau composite est négligé.

L'endommagement du matériau composite et donc une altération de ces propriétés n'est pas prise en compte.

CONCLUSION

La problématique principale se résumait à un temps d'optimisation trop long pour les cadres de fuselage en matériau composite. Les formulations analytiques disponibles dans la littérature sont nombreuses, mais tout de même insuffisantes pour faire une optimisation complètement analytique des cadres. Des simulations par éléments finis sont donc souvent utilisées pour terminer l'optimisation du cadre. L'objectif était de synthétiser les formulations existantes à partir de la littérature, de les évaluer comparativement à des simulations par éléments finis et d'en développer de nouvelles pour ainsi avoir une collections de formulations adéquates permettant de faire le dimensionnement d'un cadre analytiquement. Cette collection de formulations allait constituer le cœur d'un outil de dimensionnement pour les cadres en matériaux composites.

La revue de littérature a permis d'identifier des manques à travers les formulations disponibles dans la littérature. Un manque flagrant de formulations pour le critère de flambage latéral des cadres courbés en matériaux composites a été relevé. De nouvelles formulations analytiques ont donc été développées pour ce critère dans le présent projet de recherche. Celles-ci donnent des résultats relativement précis par rapport aux simulations par éléments finis. Les erreurs obtenues entre les prédictions et les simulations par éléments finis sont majoritairement inférieures à 10% (sections 2.2.3.4 et 2.2.4.1). Une formulation pour le flambage local a également été développée (section 2.1). Les nouvelles formulations analytiques développées permettent d'obtenir un cadre beaucoup plus près d'un cadre optimisé avant de terminer l'optimisation à l'aide des simulations par éléments finis. Cela permet de gagner du temps dans le dimensionnement d'un cadre.

Ensuite, toutes les formulations trouvées dans la littérature et développées dans le présent projet de recherche ont été rassemblées pour être intégrées dans un outil de dimensionnement pour les cadres. Cet outil est présentement au stage conceptuel. Il permettra de centraliser les formulations analytiques et ainsi simplifier le processus de dimensionnement et d'optimisation des cadres en composite.

Les formulations et méthodes analytiques développées dans le présent projet de recherche ont permis de se rapprocher de l'objectif d'un dimensionnement complètement analytique du cadre. Plusieurs opportunités d'amélioration ont aussi été identifiées. De façon générale, c'est la courbure du cadre qui est l'élément clé à inclure dans les nouvelles formulations qui seront développées.

TRAVAUX FUTURS

Cette section présente les travaux futurs relatifs à l'outil de dimensionnement et à chacun des critères de dimensionnement.

L'outil de dimensionnement

Plusieurs études de cas devront être réalisées pour évaluer le fonctionnement de l'outil de dimensionnement. Ainsi, plusieurs aspects de l'outil pourront être améliorés et la liste de règles de dimensionnement pourra être complétée. L'interprétation des marges de sécurité et les ajustements sur le cadre pourront être élaborés davantage.

Les limitations de l'outil de dimensionnement sont des limites qui peuvent être repoussées. La liste des limitations de l'outil est présentée à la section 3.5.

Comme le montre le Tableau 3-1, certains critères peuvent être développés davantage. Voici plusieurs améliorations qui ont été relevées spécifiquement à chaque critère de dimensionnement :

Rupture matériau

Les modèles de rupture matériau ont été comparés grâce à l'étude WWFE et à leur utilisation dans l'industrie. Les meilleurs modèles ont été retenus et présentés. L'information sur les modèles est relativement complète pour que l'outil de dimensionnement fonctionne bien par rapport à ce critère. Cependant, certaines propriétés des matériaux composites devront être évaluées avec des essais expérimentaux pour mieux représenter les matériaux réels utilisés. Par exemple, le paramètre d'interaction F_{12} et plusieurs autres paramètres présents dans les modèles de Puck et de Cuntze sont propres à chaque matériau composite. Avant de pouvoir correctement utiliser l'outil de dimensionnement, ces paramètres doivent être testés expérimentalement pour les divers matériaux composites utilisés.

Flambage local

Une revue de littérature a été faite et des formulations ont été trouvées pour le flambage local de cadres en matériaux composites. Ces formulations doivent être comparées à des simulations par éléments finis et à des essais expérimentaux. Toutes les formulations trouvées et présentées ne s'appliquent que pour des plaques rectangulaires. La courbure du cadre n'est pas prise en compte. Des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux devraient être conduits pour évaluer l'impact du rayon de courbure du cadre sur le chargement de flambage. Si l'effet du rayon de courbure engendre de trop grandes erreurs, de nouvelles formulations incluant le rayon de courbure dans le cadre devront être développées.

Crippling

Dans les travaux futurs, il faudra tester les formulations existantes pour le crippling de cadres en matériaux composites en les comparant à des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux. Ensuite, il faudra éventuellement développer de nouvelles formulations pour combler les manques et comparer celles-ci aux résultats obtenus par éléments finis ainsi que par des essais expérimentaux. Les nouvelles formulations devront inclure les effets des conditions frontières des différents types de chargement et de l'effet du rayon de courbure du fuselage.

Flambage latéral

Un plan d'expériences a été fait pour le flambage latéral d'un cadre en aluminium. Ce plan d'expériences a mené à un outil de prédiction du chargement de flambage latéral approximatif. Les résultats de l'outil approximatif correspondent bien aux chargements de flambage latéral obtenus par éléments finis. Les modèles approximatifs présentement utilisés dans cet outil approximatif sont des équations quadratiques. D'autres types de modèles approximatifs pourraient être utilisés dans les travaux futurs (par exemple : réseau de neurones, kringing, etc.). Ils pourraient peut-être améliorer la précision de l'outil approximatif. D'autre part, les contraintes de flambage obtenues à partir du plan d'expérience étaient parfois très élevées pour certaines configurations, bien au-delà de la contrainte de

rupture du matériau. Il serait peut-être avantageux de filtrer ces configurations et d'utiliser seulement les configurations qui résultent une contrainte de flambage à l'intérieur du domaine valide du matériau ou légèrement au-dessus de celui-ci. Ce qui permettrait d'améliorer la précision des modèles approximatifs dans le domaine valide.

Par la suite, une formulation analytique a été développée pour le flambage latéral d'un cadre droit en matériau composite. Les résultats obtenus avec cette formulation correspondent bien aux prédictions de chargement de flambage latéral pour un cadre droit composite obtenues par éléments finis. Une nouvelle formulation pourrait être développée pour inclure l'effet de courbure du cadre.

Le niveau de complexité associé au développement d'une nouvelle formulation analytique est relativement grand et c'est pour cette raison qu'une méthode a été développée pour combiner l'outil approximatif pour les cadres métalliques courbés et la formulation analytique pour les cadres composite droits. Cette méthode donne des résultats acceptables, mais une nouvelle formulation analytique est l'approche qui risque de donner les résultats les plus précis. En plus d'inclure le rayon de courbure dans la formulation analytique, d'autres éléments permettraient d'améliorer cette formulation. Il serait pertinent d'analyser davantage la simplification de la bride à trois rigidités, soit en compression, en flexion et en torsion. Présentement, cette simplification permet de calculer les rigidités d'une bride symétrique comme dans le cas d'un cadre en « I » mais constitue une source d'erreurs pour des brides non symétriques (cadre en « C » par exemple). L'asymétrie de la bride a un impact important sur le chargement de flambage (voir section 2.2.4.1). L'amélioration des calculs pour simplifier la bride permettrait d'obtenir une prédiction plus précise du flambage latéral du cadre.

Finalement, les rigidités des ressorts de rotation et de torsion, représentant la peau et les raidisseurs, sont présentement obtenues par éléments finis. Le développement d'une formulation analytique pour ces rigidités améliorerait grandement le calcul du flambage

latéral du cadre et permettrait d'avoir une méthode analytique complète et d'ainsi éviter tout calcul par éléments finis.

Flambage global

Le principal développement à faire pour le flambage global est d'adapter la formulation actuelle à un fuselage en matériau composite. Il faudra également comparer les résultats de cette nouvelle formulation avec des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux.

ANNEXE I

Évaluation des valeurs de la matrice [G]

Une deuxième pondération permettra d'être plus précis et de comparer les modes de flambage entre eux. Les conditions frontières ont un impact sur les déplacements maximaux obtenus. Un segment qui est libre à l'une de ses extrémités aura un plus grand déplacement maximal qu'un segment qui est supporté ou encastré à ses deux extrémités. Par ailleurs, plus le segment est long, plus le déplacement maximal est grand. Le déplacement maximal dépend des conditions frontières aux extrémités du segment. La Figure-A I-1 montre les quatre segments utilisés pour pondérer les valeurs de la matrice des déplacements (Tableau-A I-1). On y voit un segment simplement supporté à ses deux extrémités (SS), un segment encastré et libre (CF), un segment encastré aux deux extrémités (CC) ainsi qu'un segment simplement supporté à une extrémité et libre à l'autre (SF). Les déplacements des segments déformés sont normalisés pour avoir une pente maximale égale à 1 (la pente étant la dérivée du déplacement perpendiculaire au segment en fonction de la position sur celui-ci, voir Figure-A I-1). Les déplacements maximaux obtenus pour chacun des segments sont donnés au Tableau-A I-1.

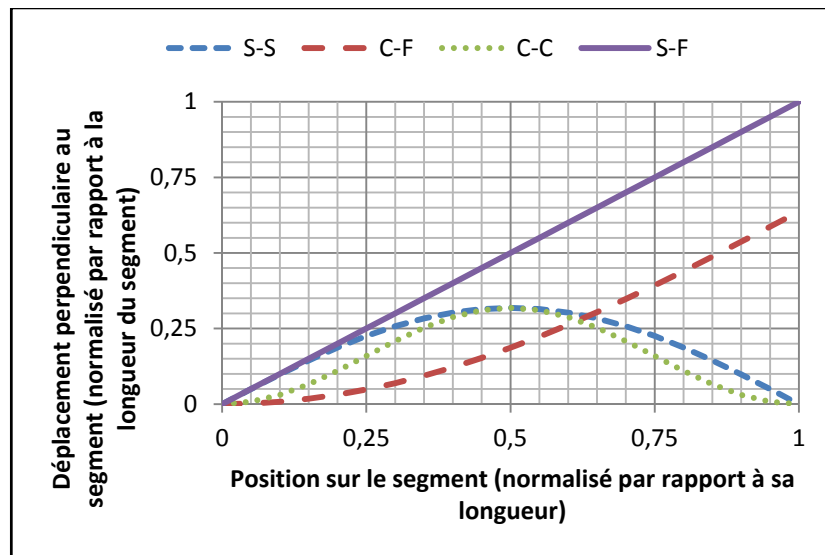


Figure-A I-1 - Déplacement obtenu sur un segment pour différentes conditions frontières (S = simplement supporté, C = encastré et F = libre)

Tableau-A I-1 - Déplacement maximal en fonction des conditions frontières pour un segment de longueur unitaire

Conditions frontières	Déplacement maximal	
SS	$1/\pi$	0,31
CF	$2/\pi$	0,64
CF*	$(2-\sqrt{2})/\pi$	0,19
CC	$1/\pi$	0,31
SF	1	1,00
SF*	1/2	0,50
<i>*déplacement à mi-longueur du segment</i>		

En utilisant ces valeurs pour faire la deuxième pondération des déplacements des groupes de nœuds (Tableau-A I-2).

Tableau-A I-2 - Matrice des déplacements maximaux après la deuxième pondération

Mode	d_A (peau)	d_B (âme)	d_C (coin)	d_D (bride)
Latéral	0	$SF^* \rightarrow \frac{L_{ame}}{2}$	$SF \rightarrow L_{ame}$	$SF \rightarrow L_{ame}$
Âme	0	$SS \rightarrow \frac{L_{ame}}{\pi}$	0	$SF \rightarrow L_{bride}$
Bride	0	0	0	$SF \rightarrow L_{bride}$
Peau	$SS \rightarrow \frac{L_{peau}}{\pi}$	0	0	0

Finalement, les valeurs décrivant la déformée en flambage latéral ont été ajustées légèrement en observant les déformées obtenues par éléments finis. Il a été observé que le flambage latéral suivait des conditions frontières se situant entre les conditions SF et CF. En moyenne, les déplacements maximaux obtenus par éléments finis étaient de 0,35 po et 0,8 po pour les groupes de nœuds *B* et *C*, respectivement. La matrice finale des déplacements maximaux pour les différents modes de flambage est présentée au Tableau-A I-3.

Tableau-A I-3 - Matrice des déplacements finaux

Mode	d_A (peau)	d_B (âme)	d_C (coin)	d_D (bride)
Latéral	0	$0,35L_{ame}$	$0,8L_{ame}$	$0,8L_{ame}$
Âme	0	$0,31L_{ame}$	0	L_{bride}
Bride	0	0	0	$0,64L_{bride}$
Peau	$0,31L_{peau}$	0	0	0

ANNEXE II

Décalage des prédictions de l'Outil Excel approximatif de flambage latéral d'un cadre métallique

L'outil fournit un tableau indiquant comment modifier les contraintes de flambage prédites pour les rendre plus conservatrices. Avant la modification, les contraintes de flambage sont nominales et la moitié de la population se situe du côté conservateur des prédictions. Un décalage des prédictions permet d'avoir une plus grande proportion de la population du côté conservateur. Le Tableau-A II-1 montre un exemple de tableau des décalages conservateur. Par exemple, la valeur nominale pourrait être égale à 63797 psi et en diminuant cette valeur à 53519 psi, on aurait une prédiction conservatrice pour 98% de la population.

Tableau-A II-1 - Exemple de tableau de décalage conservateur

Décalage conservateur	Rayon de fuselage de 53 po		Rayon de fuselage de 1000 po	
Population (%)	Valeur (psi)	Décalage (%)	Valeur(psi)	Décalage(%)
50%	63797	0,22%	63949	0,18%
60%	62825	-1,30%	63029	-1,26%
70%	61705	-3,06%	61570	-3,54%
80%	60515	-4,93%	60113	-5,83%
85%	59758	-6,12%	59253	-7,17%
90%	58480	-8,13%	58667	-8,09%
91%	58041	-8,82%	58550	-8,28%
92%	57679	-9,39%	58257	-8,73%
93%	57446	-9,75%	58011	-9,12%
94%	56951	-10,53%	57766	-9,50%
95%	56176	-11,75%	57720	-9,57%
96%	55516	-12,79%	56956	-10,77%
97%	54817	-13,88%	56622	-11,29%
98%	53519	-15,92%	55849	-12,51%
99%	52326	-17,80%	53457	-16,25%
100%	48041	-24,53%	51889	-18,71%

La Figure-A II-1 montre un exemple de prédictions données par l'outil. On peut y voir trois courbes de chargements en fonction du rayon. Une première courbe montre les résultats obtenus par éléments finis (FEM). Une deuxième courbe montre les prédictions nominales

obtenues avec l'outil approximatif (Tool Nominal). Une troisième courbe montre les prédictions après un décalage conservateur pour couvrir 98% de la population (Tool Pop 98%). On peut voir que certaines prédictions sont conservatrices et d'autres, non. Le décalage a permis d'assurer que la grande majorité des prédictions soit conservatrice.

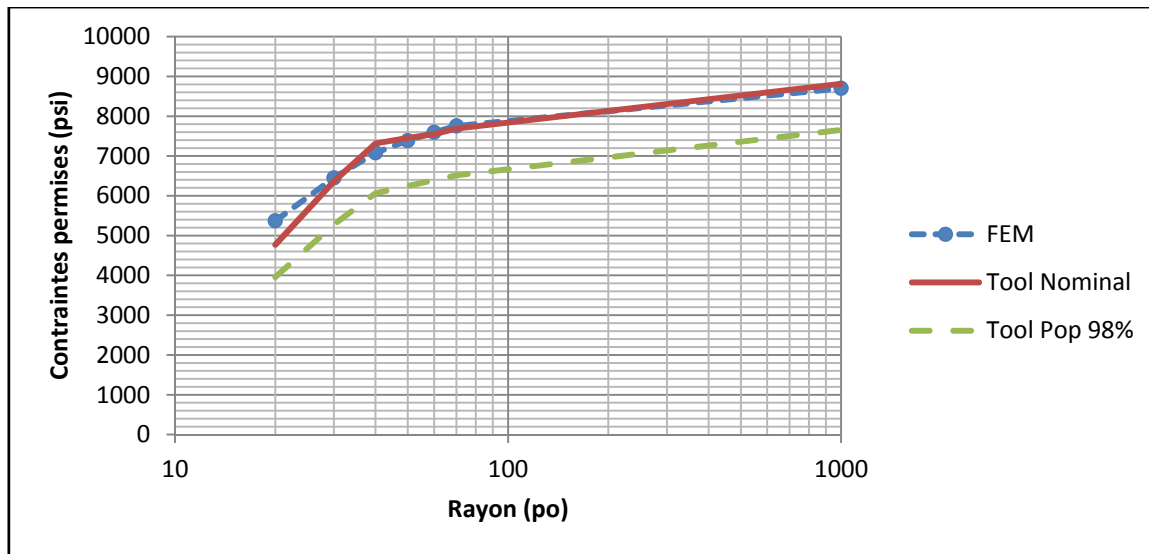


Figure-A II-1 - Exemple de décalage conservateur, *Comparaison entre la méthode des éléments finis (FEM) et les approximations (nominal et pour un décalage à 98% de la population)*

ANNEXE III

Lateral buckling criteria and survey

Knowing the proportions of each buckling mode present in a given buckling shape is only the starting point of determining which buckling mode is dominant. Analysing many buckling shape from the design of experiment revealed that the dominant buckling mode is not simply the buckling mode having the biggest proportion.

A selection criterion has been developed based on many buckling shapes observation. The proposed criterion is based on the ratio (R) of the lateral buckling proportion on the maximal proportion value through all buckling mode proportions (see equation A III-1).

$$R = \frac{L}{\max(L, W, F, S)} \quad (\text{A III-1})$$

L , W , F and S are lateral, web local, flange local and skin local buckling mode proportions, respectively. The lateral buckling criteria is defined as; the buckling mode is lateral buckling if equation A III-2 is true.

$$R \geq R_{min} \quad (\text{A III-2})$$

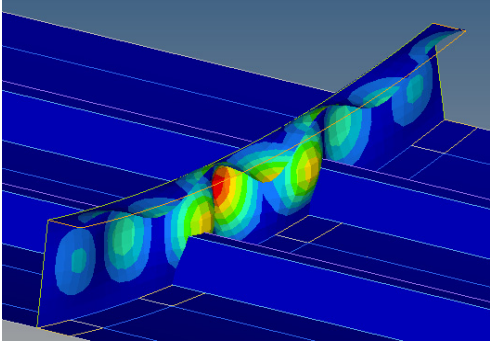
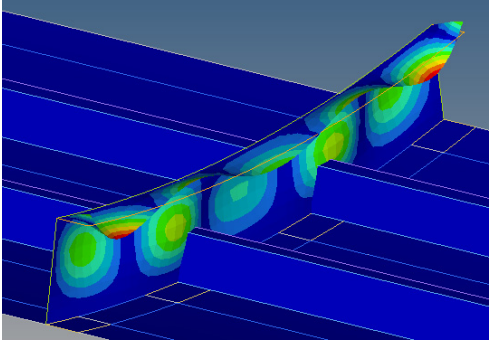
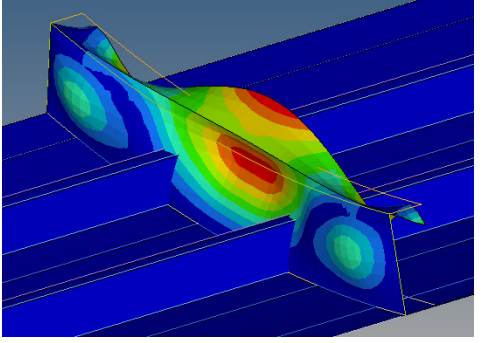
The value of R_{min} was adjusted using the results of a simple survey. In this survey, a series of 18 pictures containing a buckling shape was presented to 9 persons from the aircraft stress engineering department (experiences ranging from less than one year to around 20 years) (see Table-A III-2 for the presented cases with pictures). For each picture, they had to choose if the presented buckling shape was lateral buckling or not. Compiled results are presented in Table-A III-1. Using the survey results, the value of R_{min} have been chosen to be equal to 0.3. Also, it have been chosen that if the R value is between 0.15 and 0.3, the buckling shape is "may be" lateral buckling.

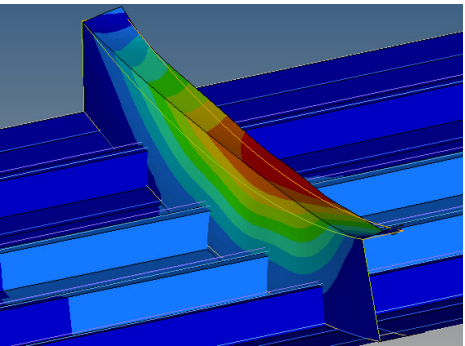
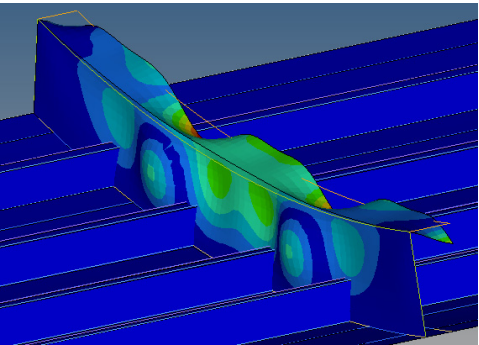
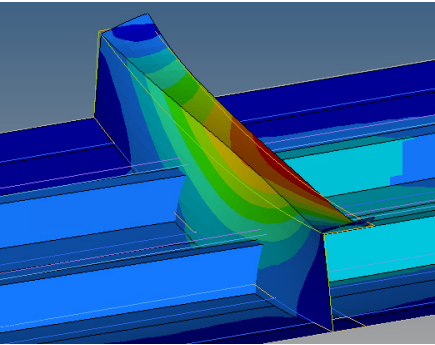
Results obtained with this criterion are presented and compared to the survey results in Table-A III-1. Along with the survey results, there is a column indicating the proportion of survey response in agreement with the majority (named "% certitude"). For example, if the value in the survey column is "no" and the % certitude is 88%, it mean that 88% of responses was "no" and the rest of responses was "yes". Also, colors indicate if the survey results are in agreement with the criteria results. Green, pale orange and dark orange indicates, "in agreement", "acceptable" and "not in agreement", respectively. "Acceptable" cases are cases for which the survey results are not in agreement with the criteria but the "% certitude" value is near 50 %, indicating that it is an ambiguous case. The case number 5 is the only case where the survey % certitude is high but the survey result is not in agreement with the criteria. This means that the criteria gave good or acceptable results in 94% of cases. This validates the criteria.

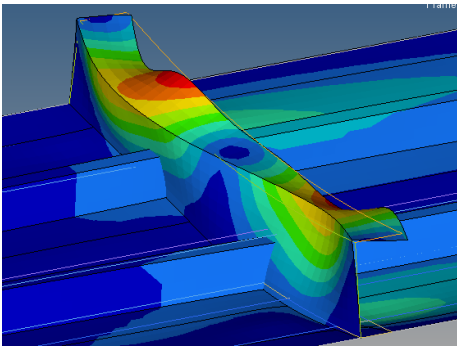
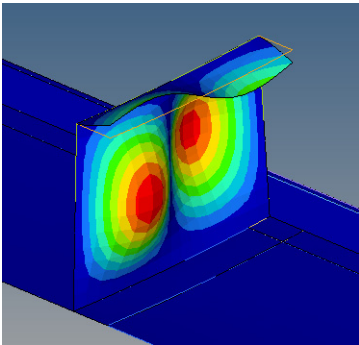
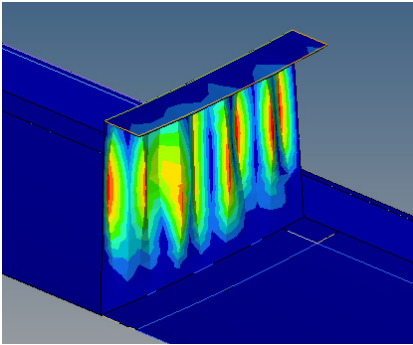
Table-A III-1 - Lateral buckling criteria survey - compiled results

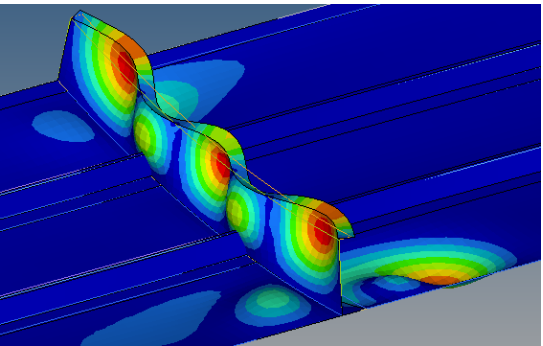
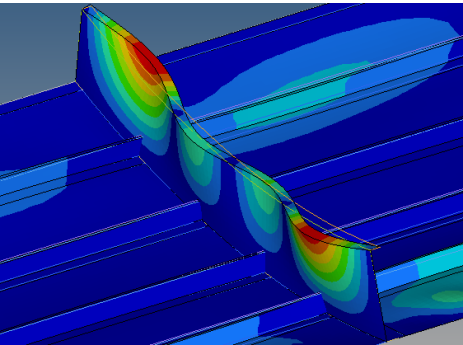
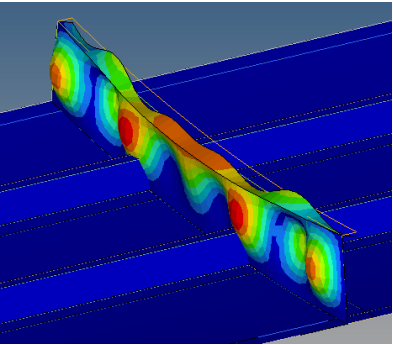
Is this lateral buckling ?			
Case	Survey	% certitude	Criteria
1	no	88%	no
2	no	100%	no
3	May be	50%	yes
4	yes	86%	yes
5	no	86%	yes
6	yes	86%	yes
7	yes	100%	yes
8	no	100%	no
9	no	100%	no
10	yes	75%	yes
11	yes	86%	yes
12	no	57%	yes
13	yes	100%	yes
14	no	100%	no
15	no	57%	yes
16	May be	50%	May be
17	yes	63%	yes
18	May be	50%	May be

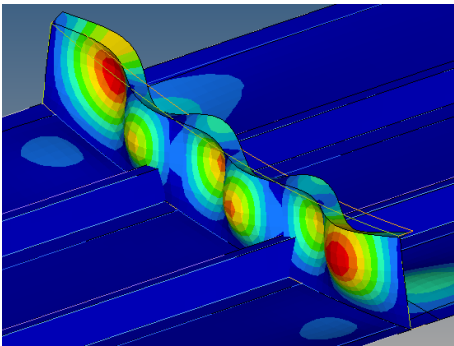
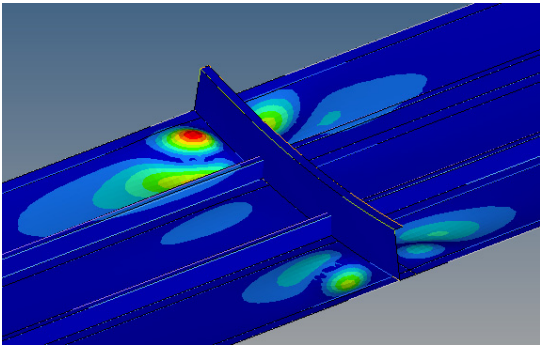
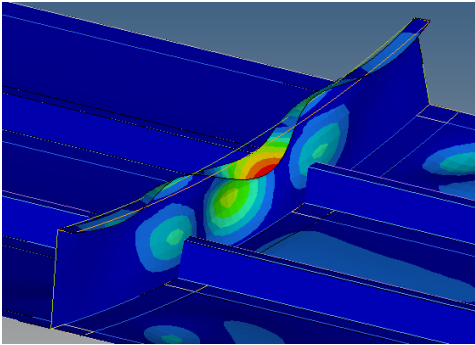
Table-A III-2 - Survey - Is this lateral buckling?

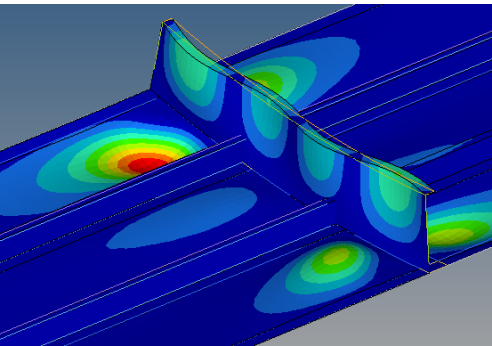
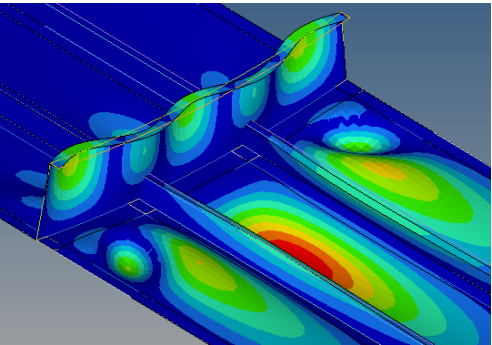
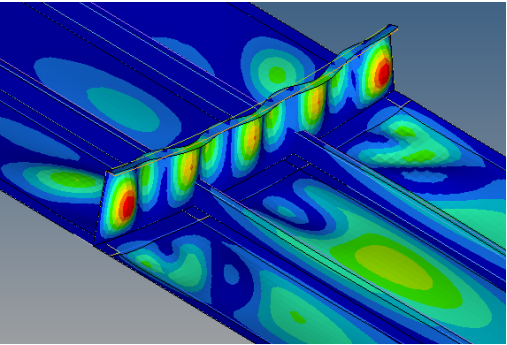
C-Beam - Case n°	1	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.05	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	1	
Frame web	2.8	
Buckling mode	1	
Eigen value	14130	
C-Beam - Case n°	2	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.05	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	1	
Frame web	2.8	
Buckling mode	5	
Eigen value	15610	
C-Beam - Case n°	3	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.05	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	1	
Frame web	2.8	
Buckling mode	15	
Eigen value	24680	

C-Beam - Case n°	4	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.15	
Frame length	30	
Frame radius	70	
Inner flange	1.5	
Frame web	3.6	
Buckling mode	1	
Eigen value	53520	
C-Beam - Case n°	5	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.15	
Frame length	30	
Frame radius	70	
Inner flange	1.5	
Frame web	3.6	
Buckling mode	7	
Eigen value	67210	
C-Beam - Case n°	6	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.25	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	1.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	1	
Eigen value	119400	

C-Beam - Case n°	7	
Stringer config	3	
Frame thickness	0.25	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	1.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	7	
Eigen value	233700	
C-Beam - Case n°	8	
Stringer config	1	
Frame thickness	0.05	
Frame length	6	
Frame radius	60	
Inner flange	1	
Frame web	4.4	
Buckling mode	1	
Eigen value	7086	
C-Beam - Case n°	9	
Stringer config	1	
Frame thickness	0.05	
Frame length	6	
Frame radius	60	
Inner flange	1	
Frame web	4.4	
Buckling mode	30	
Eigen value	74810	

C-Beam - Case n°	10	
Stringer config	1	
Frame thickness	0.15	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	0.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	30	
Eigen value	74810	
C-Beam - Case n°	11	
Stringer config	1	
Frame thickness	0.25	
Frame length	30	
Frame radius	60	
Inner flange	0.5	
Frame web	4.4	
Buckling mode	6	
Eigen value	33480	
C-Beam - Case n°	12	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.05	
Frame length	18	
Frame radius	70	
Inner flange	0.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	6	
Eigen value	33480	

C-Beam - Case n°	13	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.15	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	0.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	6	
Eigen value	97030	
C-Beam - Case n°	14	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.15	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	0.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	21	
Eigen value	209400	
C-Beam - Case n°	15	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.15	
Frame length	18	
Frame radius	50	
Inner flange	0.5	
Frame web	2.8	
Buckling mode	21	
Eigen value	209400	

C-Beam - Case n°	16	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.25	
Frame length	18	
Frame radius	60	
Inner flange	0.5	
Frame web	3.6	
Buckling mode	5	
Eigen value	91850	
C-Beam - Case n°	17	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.25	
Frame length	18	
Frame radius	60	
Inner flange	0.5	
Frame web	3.6	
Buckling mode	14	
Eigen value	119600	
C-Beam - Case n°	18	
Stringer config	2	
Frame thickness	0.25	
Frame length	18	
Frame radius	60	
Inner flange	0.5	
Frame web	3.6	
Buckling mode	31	
Eigen value	220600	

ANNEXE IV

Mesher and analysis tool

The *mesher and analysis tool* is a small collection of programs developed using C++ language and allowing making a series of finite element analysis using a user defined parametric model. All model parameters can be set to single or ranged values. *The mesher and analysis tool* can be used to make a full factorial design of experiment using the given parameter ranges. The tool uses MD Nastran V2010 for the FEM simulations and it also retrieves displacements and stresses in groups of points. This information is useful to analyse the buckling shape in a later step. All outputs of the *mesher and analysis tool* are compiled in a single output file.

The meshing tool is able to make any FEM made of orthogonal rectangular plates. This means that all rectangles sides in the finite element model have to be parallel to the x, y or z direction. However, the tool allows curving the model around one direction, transforming the model from an orthogonal space to a cylindrical space. In that case, the rectangles sides are following the θ , r or z direction. Also, each rectangle is made of a grid of rectangular CQUAD4 elements, making it a detailed finite element model. Also, the tool allows using other element types like CBEAM, CBUSH and some others. The complete list of elements that can be created by the *mesher and analysis tool* is given in section IV.7 along with information on how to define and use parameters. Figure-A IV-1 gives an example of a finite elements model generated using the *mesher and analysis tool*, more detail on this example are given in section 2.2 (and Figure 2-2). Figure-A IV-2, Figure-A IV-3 and Figure-A IV-4 are other examples showing the potential of the *mesher and analysis tool*.

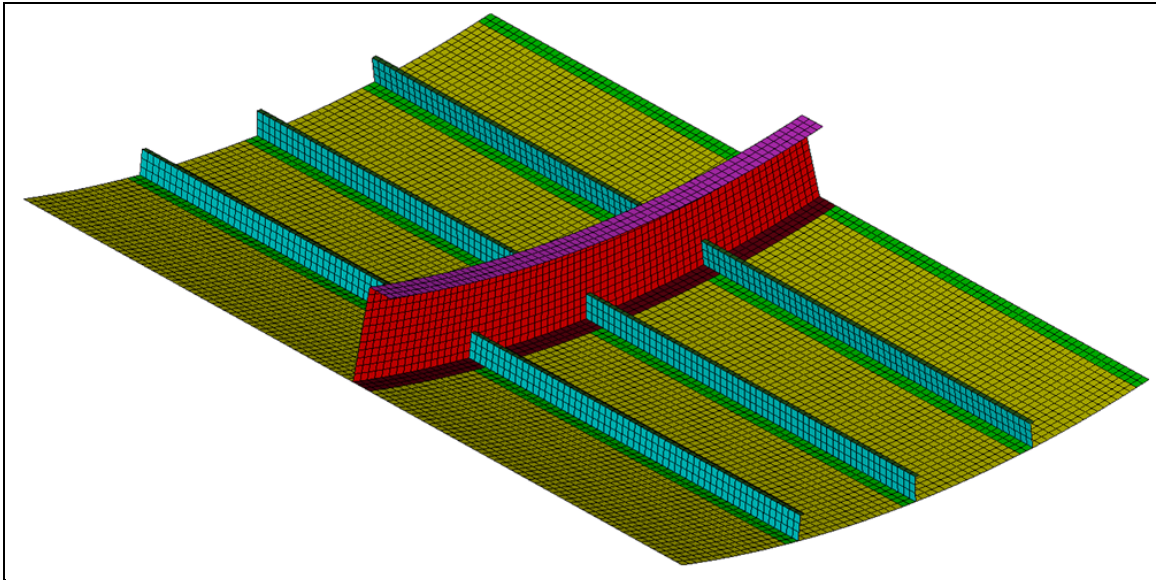


Figure-A IV-1 – First example of FEM generated using the *mesher and analysis tool* (fuselage section)

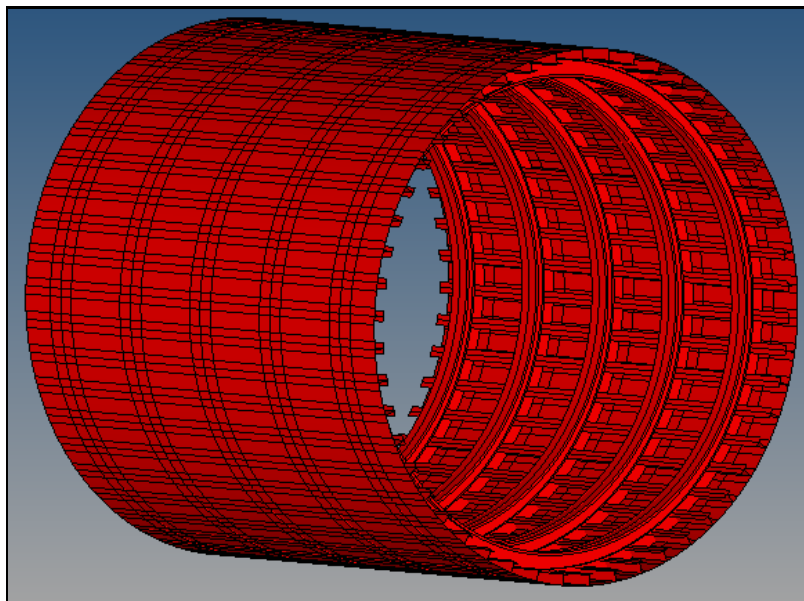


Figure-A IV-2 – Second example of FEM generated using the *mesher and analysis tool* (Complete fuselage)

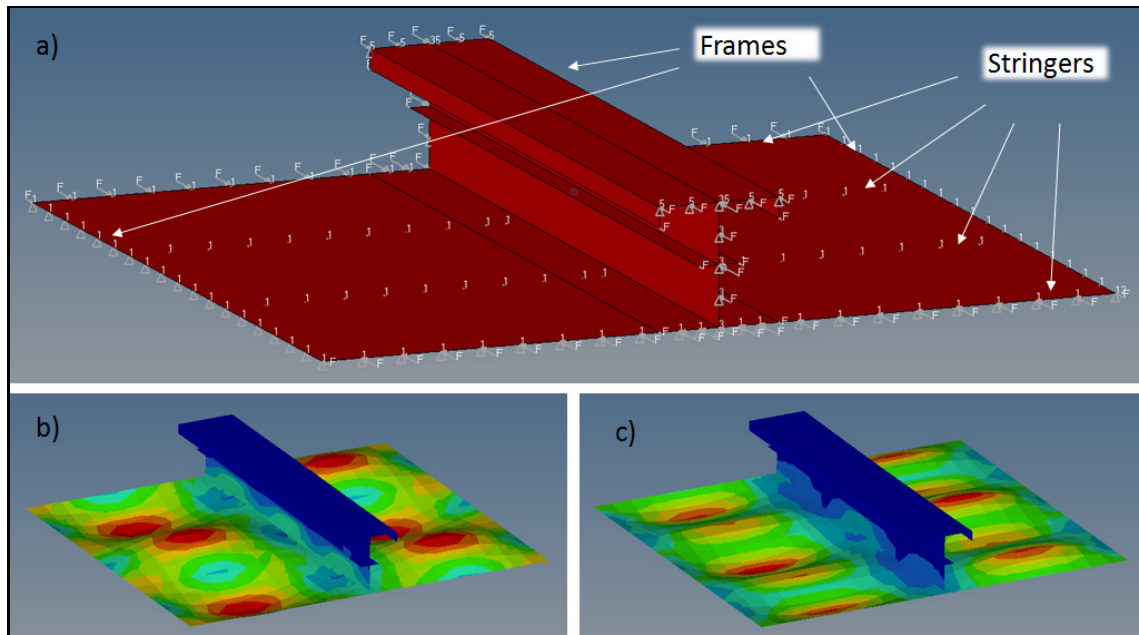


Figure-A IV-3 – Example of FEM and buckling analysis generated using the *mesher and analysis tool* (Frame with skin in compression in frame longitudinal direction)

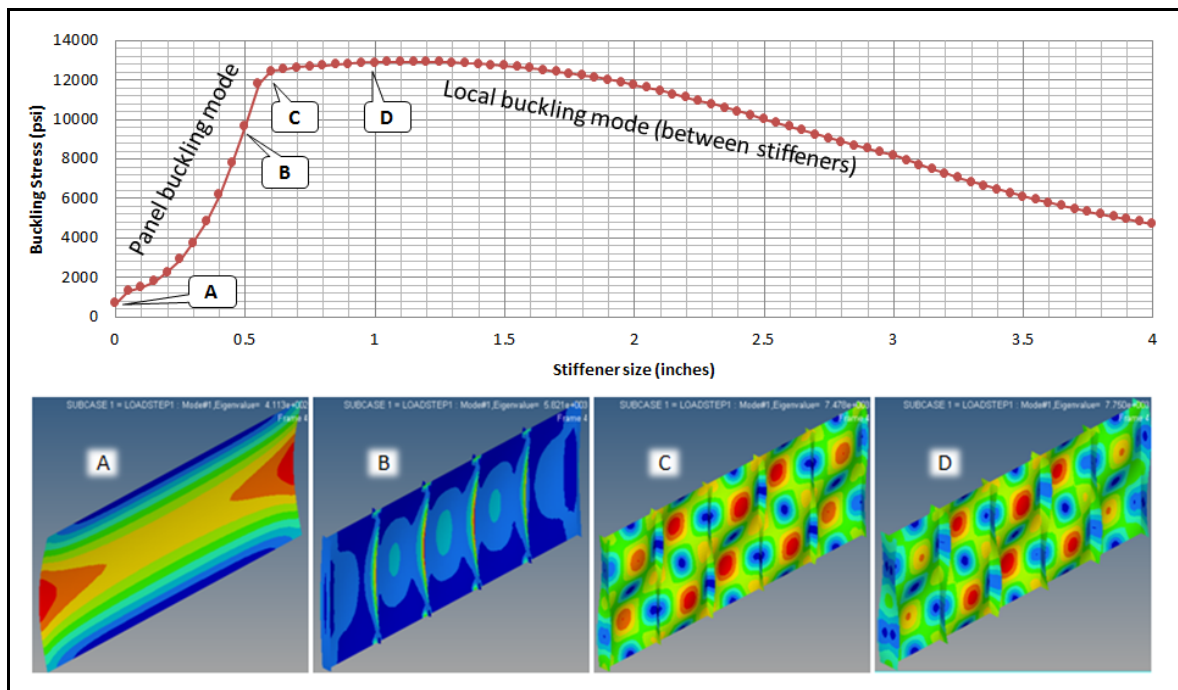


Figure-A IV-4 - Example of FEM and parameter effect analysis on buckling generated using the *mesher and analysis tool* (Skin and symmetric blade stiffeners, compression in stiffeners longitudinal direction)

The *mesher and analysis tool* is made of four programs (analysis.exe, param_update.exe, mesher.exe and prepunch.exe). The analysis.exe program is the main program called to launch everything. This program will launch other programs automatically when needed. The user simply double clicks the analysis.exe program to start it. Each programs will be explain in more details in following sections.

Figure-A IV-5 gives a simplified view of the *mesher and analysis tool* (More detailed schemas will be given in later sections). It uses three input files (topo.dat, dotdat.dat and analysis_param.dat) and gives one output file (analysis_result.dat). Input and output files are shown in blue and green, respectively. *mesher and analysis* programs are shown in dark gray. The topo.dat file contains a definition of the FEM model using parameters from the analysis_param.dat file. The dotdat.dat is the header file of the FEM model. The rest of the FEM model is automatically generated. Sections IV.1 to IV.5 are used to describe all programs involved in the mesher and analysis tool, while section IV.6 shows how all the programs interact together. Finally, section IV.7 provides more in-depth information required to fully understand this tool.

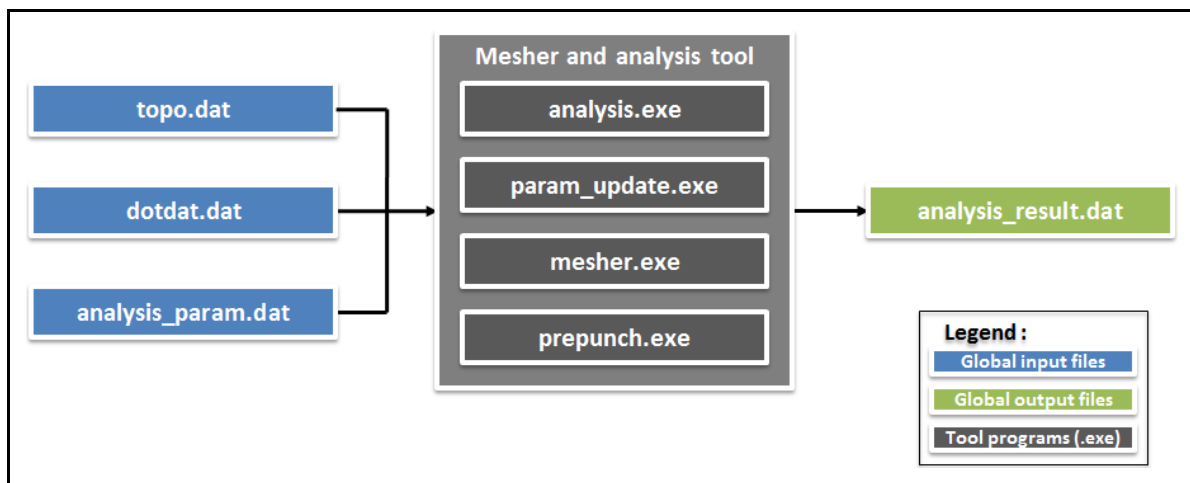


Figure-A IV-5 - Mesher and analysis schema

IV.1 analysis.exe program

The purpose of the analysis.exe program is to call all the other programs repeatedly until a stopping condition is reached. It uses a file called *loop.dat* to store a flag indicating if the iterations have to continue. That enables to manage design of experiment from the initial parameters provided by the user. The algorithm is as follows:

1. Reset the loop.dat file (set to "false");
2. Call iteration.bat;
3. Check the loop.dat file (if "true", start over at step 1).

The iteration.bat file contains a list of commands for a single iteration. It also has to include a mechanism to set the loop.dat file to "true" at each iteration for the analysis to progress until the end. The proposed iteration.bat file contains the following commands:

```
call param_update.exe analysis_param.dat current_param.dat
call mesher.exe current_param.dat topo.dat
call nastran.bat dotdat.dat
call prepunch.exe analysis_param.dat current_param.dat
    mesherout_groups.dat dotdat.pch
copy /B analysis_result.dat + iteration_result.dat analysis_result.dat
```

In this case, it is the *param_update.exe* program that is setting the *loop.dat* file to "true" or "false" depending if the full factorial design of experiment is completed or not. At the end of each iteration, the current iteration result is added to the end of the *analysis_results.dat* file, which contains compiled results. Figure-A IV-6 illustrates the analysis.exe program relationship with other programs and files. Steps are numbered from 1 to 5, corresponding to five command lines in the *iteration.bat* file. Temporary files are shown in light gray, command .bat files are shown in purple and Nastran is shown in a black.

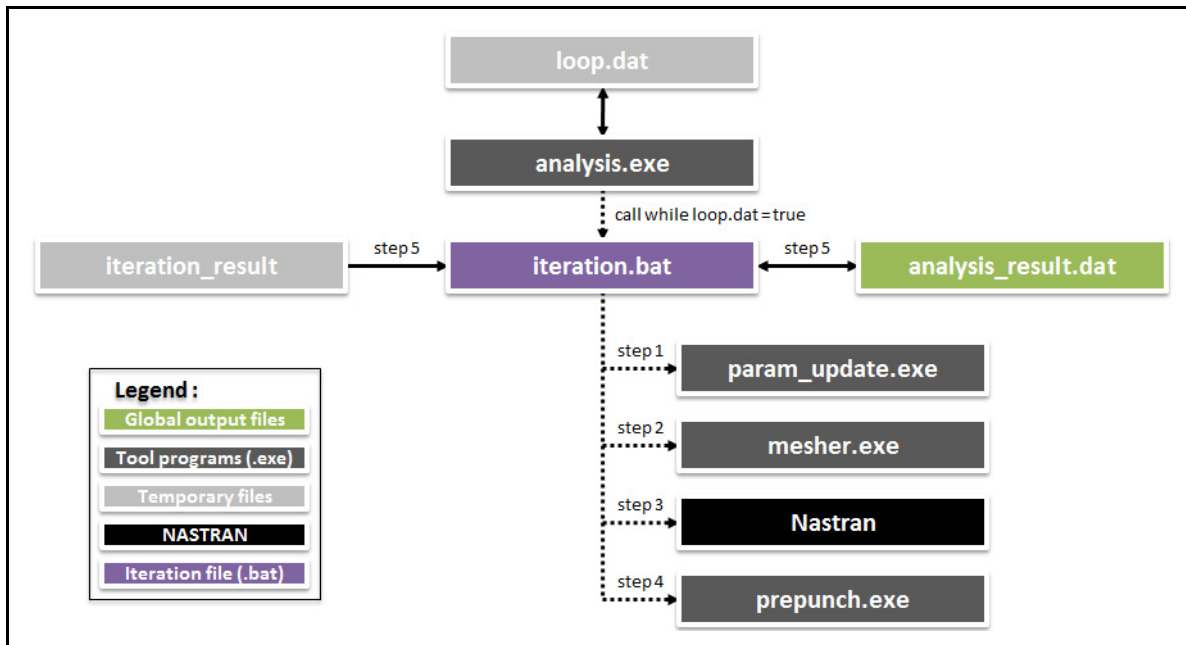


Figure-A IV-6 - analysis.exe schema

IV.2 param_update.exe program

param_update.exe is used to update the current parameters values for the next iteration. This program is called with the following command line from the *analysis.exe*:

```
call param_update.exe analysis_param.dat current_param.dat
```

The algorithm of the *param_update.exe* program is simplified to the three following step:

1. Load *analysis_param.dat*: Load the list of parameters from the *analysis_param.dat* file. Each parameter having a name, a range and a current value. At the beginning, the current values are the starting range values of all parameters.
2. Update *current_param.dat*: Set the current values in the *current_param.dat* file. The *current_param.dat* file contains only single value parameters, not ranges. If there is no *current_param.dat* file, it creates one and set all current values to starting values.
Important note: To initialize an analysis before starting it, *current_param.dat* file has to be deleted by the user.
3. Update *loop.dat*: When the program updates the *current_param.dat*, it also updates a file named *loop.dat*. This file contains either "true" or "false", indicating if the analysis has to continue or not.

In summary, there are two scenarios. With the first scenario, if the *current_param.dat* file exists, the file is updated to the next configuration of parameters. It also update the *loop.dat*

file to indicate if the analysis continue (it is the opposite of an *end of analysis* flag). Second scenario, if no *current_param.dat* file exists, it creates a *new current_param.dat* for the first configuration of parameters (or first iteration). The *param_update.exe* program is illustrated in Figure-A IV-7.

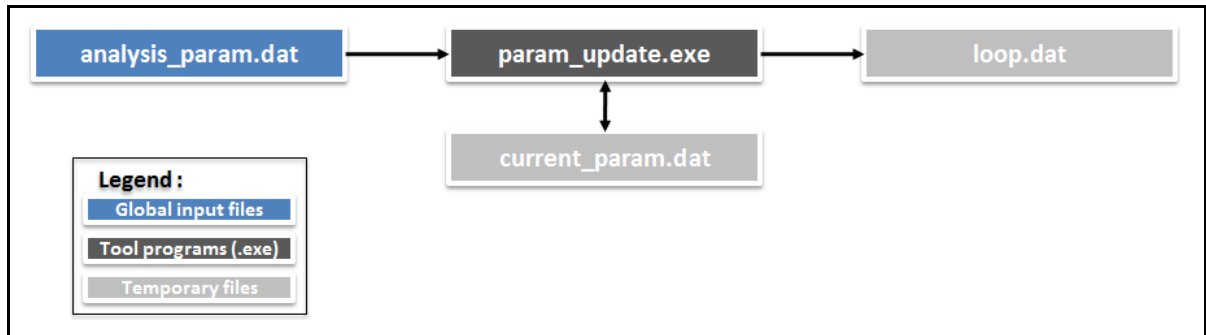


Figure-A IV-7 - *param_update.exe* schema

IV.3 mesher.exe program

The *mesher.exe* program generates the FEM model (returns it in *mesherout.dat* file). This file includes only 1D elements, 2D elements, forces and SPCs of the FEM models. The header of the FEM model is in the *dotdat.dat* file, which is including the *mesherout.dat* file (See *dotdat.dat* file for more details). Only the *dotdat.dat* file is send to NASTAN (equivalent to the *.bdf* file).

The *mesher.exe* program uses *current_param.dat* and *topo.dat* to generate the FEM model.

The steps done by the *mesher.exe* program are as follow:

1. Loading *current_param.dat* and *topo.dat*.
2. Read file and apply line by line to the FEM model. (see section IV.7)
3. Write FEM elements to *mesherout.dat*, in the following order :
 - 3.1. one CORD2C (if needed);
 - 3.2. GRID elements;
 - 3.3. CTRIA3 elements;
 - 3.4. CBEAM elements;
 - 3.5. CBUSH elements;
 - 3.6. CQUAD4 elements;
 - 3.7. FORCE elements;
 - 3.8. SPC elements.

4. Write groups of points information in *mesherout_groups.dat*, output each element with a list of associated groups IDs for:
 - 4.1. GRID elements;
 - 4.2. CQUAD4 element;
 - 4.3. CTRIA3 elements.

The mesher.exe program has two inputs files and two output files, see Figure-A IV-8.

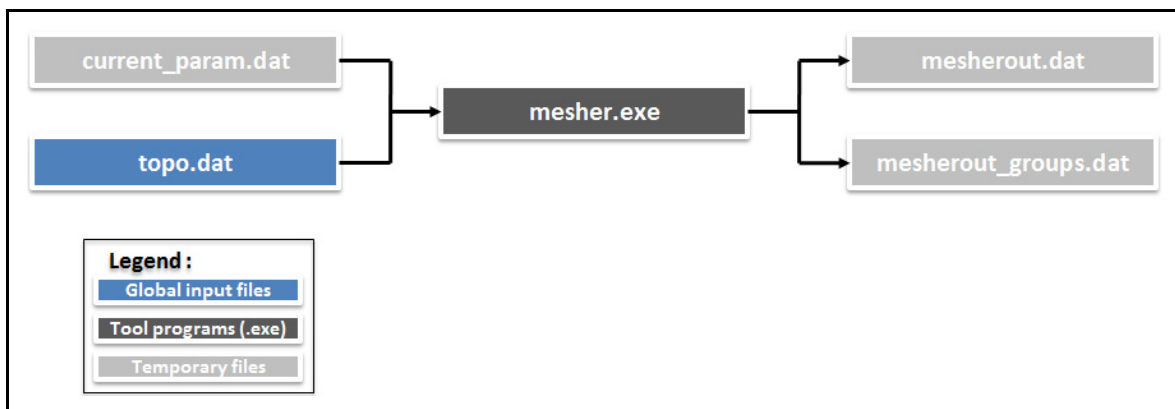


Figure-A IV-8 - mesher.exe schema

IV.4 prepunch.exe program

This program process results from a SOL105 analysis. Displacements and stresses are retrieved for groups of points from the *dotdat.pch* file generated by NASTRAN. This information will then be used to analyse buckling shapes.

This program is called with the following command from *analysis.exe*:

```
call prepunch.exe analysis_param.dat current_param.dat
    mesherout_groups.dat dotdat.pch
```

The algorithm of the *prepunch.exe* program is resumed in the following three steps:

1. Load the parameters using *analysis_param.dat* and *current_param.dat*.
 - 1.1. Load parameters list from *analysis_param.dat*.
 - 1.2. Load current values from *current_param.dat*.
2. Load FEM results using *mesherout_groups.dat* and *dotdat.pch*.
 - 2.1. Check the number of GRID and CQUAD4 elements from *mesherout_groups.dat* (by checking the highest ID elements).
 - 2.2. Index the GRID and CQUAD4 elements groups (listing group IDs for each element).
3. Load the *dotdat.pch* file.

- 3.1. The file is considered line by line.
- 3.2. Each line is analysed using keywords and line format (See code for more details).
- 3.3. Each line of useful information has to be added to the right place in the gathered information. (simplified results)
- 3.4. Write gathered information in the *iteration_result.dat* file. (in a single line of text)

The prepunch.exe program has four input files and one output file, see Figure-A IV-9. The Nastran output file is shown in an orange box.

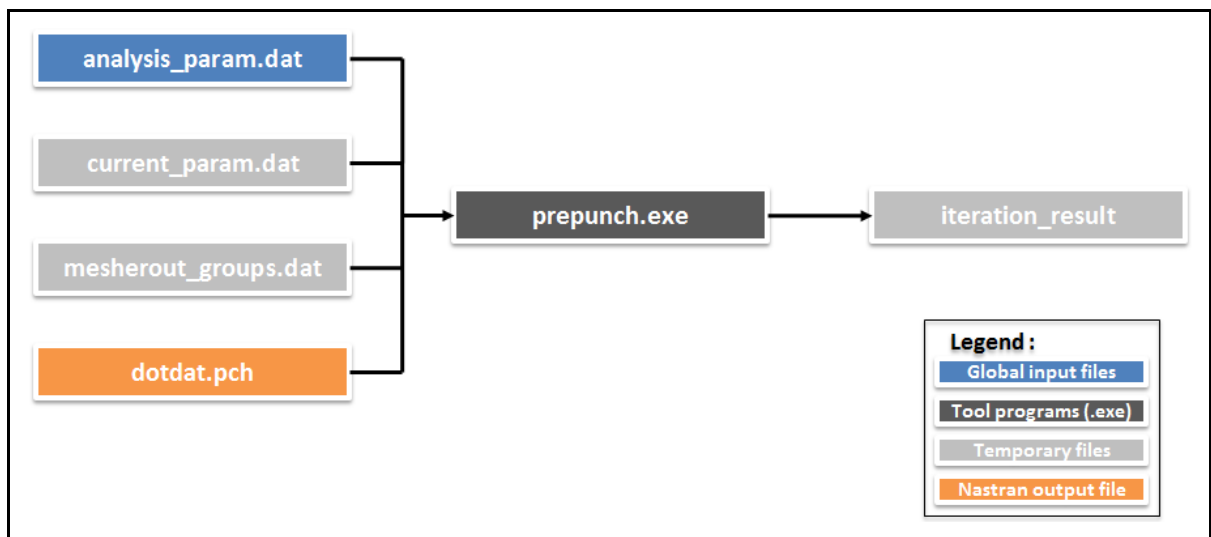


Figure-A IV-9 - prepunch.exe schema

IV.5 Nastran program

The *Nastran* program is used to solve the finite elements model for linear buckling (SOL105). It should be possible to use another similar solver like the Altair solver (same input and output files). The input file for *Nastran* is the *dotdat.dat* files, which is a header including the *mesherout.dat* file generated by the *mesher.exe* program. The result of *Nastran* are given in the *dotdat.pch* file, see Figure-A IV-10.

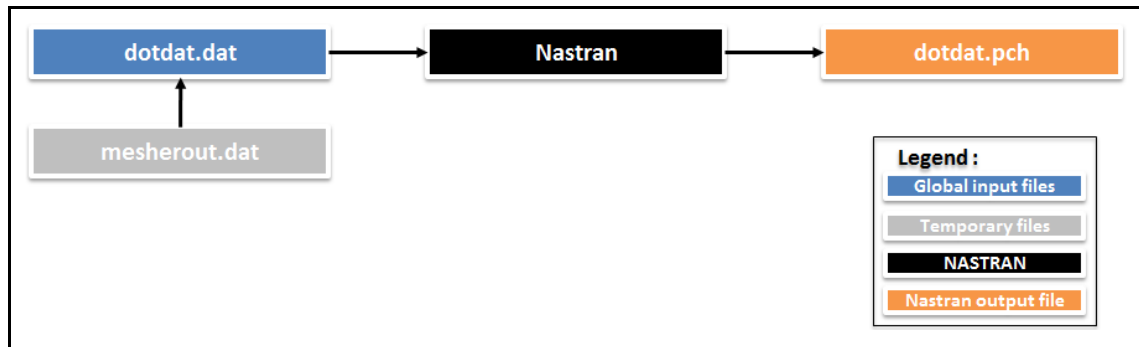
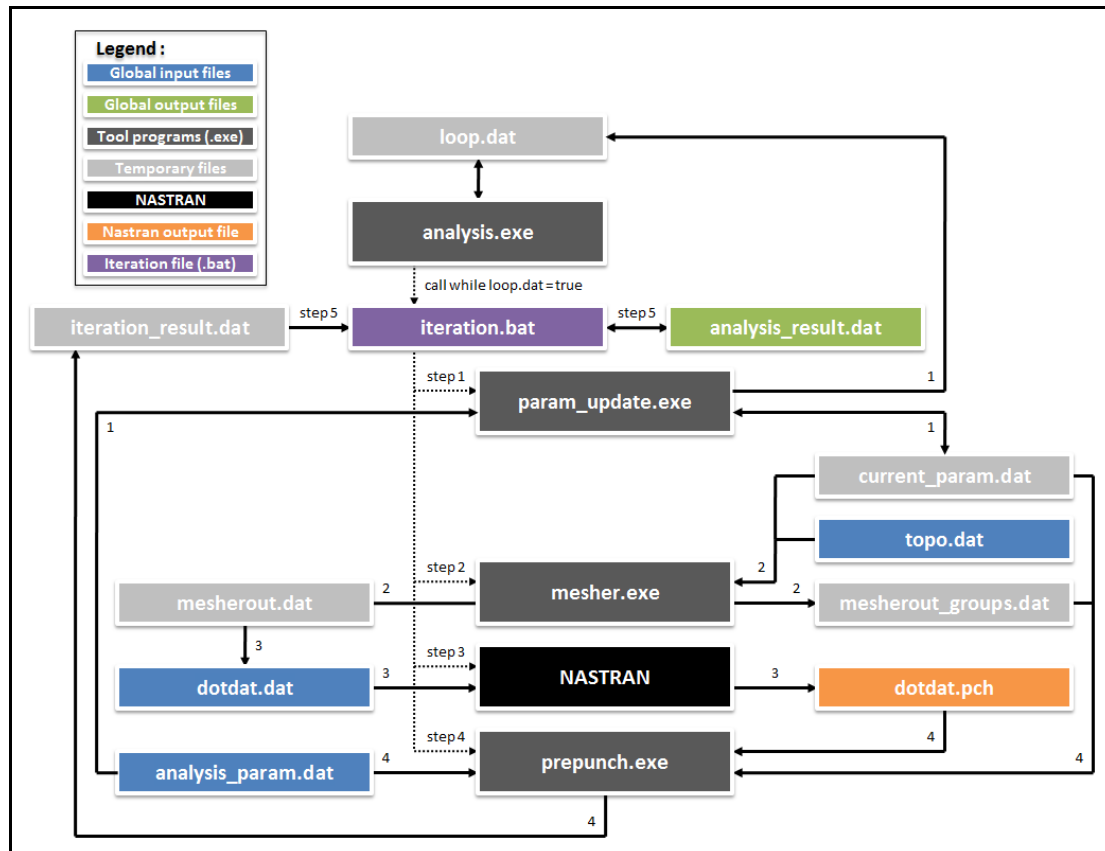


Figure-A IV-10 - Nastran schema

IV.6 Programs interaction

All programs are called in sequence by the *analysis.exe* program. This sequence is defined in the *iteration.bat* file. With each program execution, some files are changes, which will be used by other programs in following steps. The interaction between all programs and all files is presented in Figure-A IV-11. Step numbers are indicated on arrows when applicable.

Figure-A IV-11 - Global schema of the *mesher* and *analysis* tool

IV.7 Parameters and topology

IV.7.1 Parameters

All parameters are defined in the *analysis_param.dat* file using the keyword *param*. They are defined to a single value using the following format:

```
param name value
```

Parameters are defined to a range of values by setting a starting, end and step value:

```
param name start end step
```

Parameters can also be calculated from two other parameters applying one mathematical operation. This is made with one of the following command:

```
param+ name param1 param2
param- name param1 param2
param* name param1 param2
param/ name param1 param2
```

With previous command lines, the mathematical operator is used between the first and the second parameter in the written order. The result is set to a new parameter with the given name.

IV.7.2 Radius parameters

There is a special parameter, named radius, allowing curving the space of the finite element model. If one parameter in the *analysis_param.dat* file is called radius, the curving of space will be activated. *mesher.exe* will curve the space, the XY plane is transformed and the Z direction stay unchanged. Figure-A IV-12 illustrates this transformation.

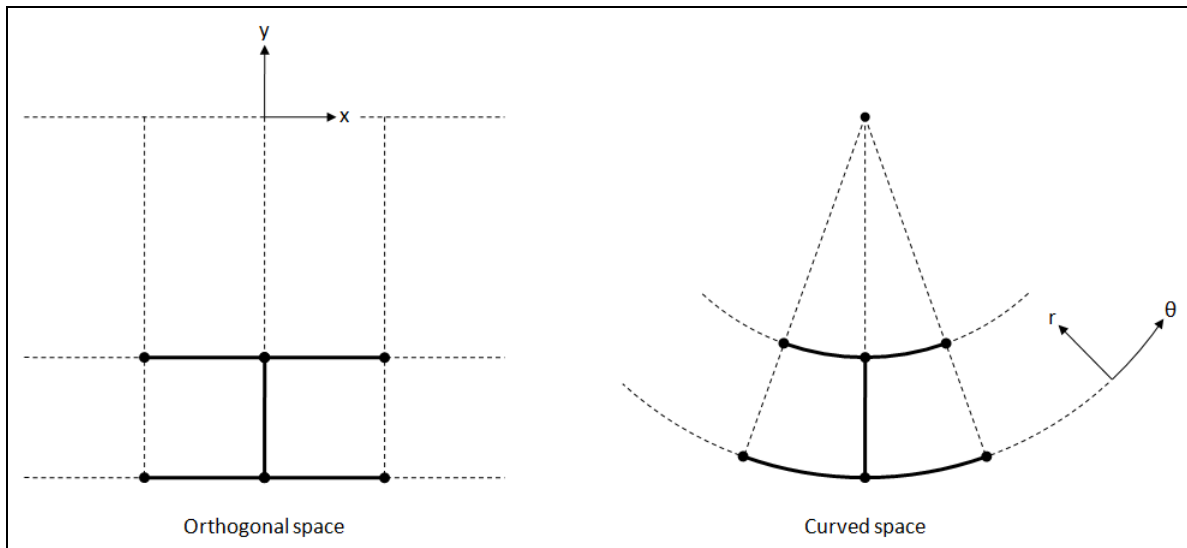


Figure-A IV-12 - Curving FEM space

IV.7.3 Topology

With the *mesher and analysis tool*, the finite element model is exclusively made of rectangle and triangle shapes, which are all orthogonal. Each rectangle or triangle is mesh with CQUAD4 or CTRIA3.

The definition of the finite elements model starts by defining a tree of vectors. Each vector of the tree has a start position, a direction, a length and a size of division. The start position of all vectors is either the end of another vector or the origin position. The size of division doesn't affect the shape of the tree but it is used to set the number of element in each rectangle. Figure-A IV-13 gives an example of a tree of vectors arbitrarily chosen to illustrate how it works (nothing specific). This example is a two dimensions model but the *mesher and analysis tool* works with three dimensions.

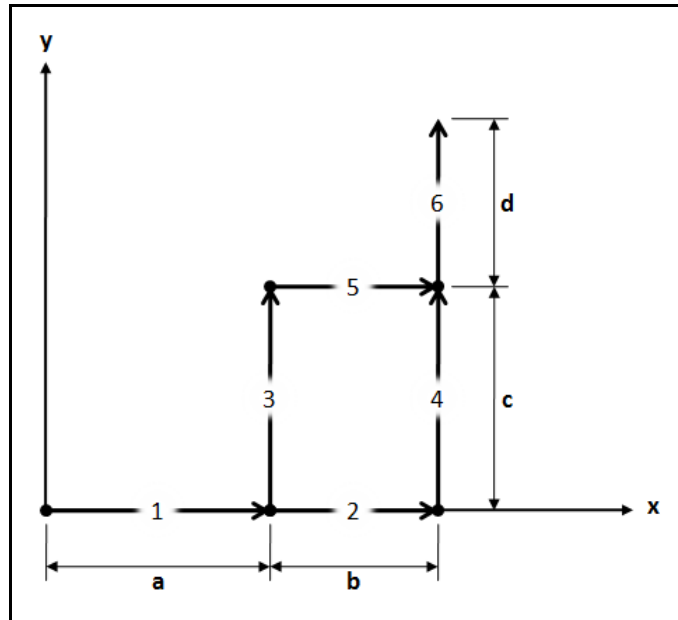


Figure-A IV-13 - 2D Tree of vectors example

The command format defining a vector is:

```
direction ID start length size
```

The direction is defined by one of the following keyword:

Table-A IV-1 - Vector direction keyword

Keyword	Direction
xp	x positive
xn	x negative
yp	y positive
yn	y negative
zp	z positive
zn	z negative

The ID is a unique numerical value used to identify each vector. The start position is set to the ID of another vector or a zero value (for the origin). Using a vector ID for the start value, the new vector starting position will be set to the end of the given vector ID.

The vectors' tree example of Figure-A IV-13 would be defined with the following commands:

```

xp 1 0 a size
xp 2 1 b size
xp 3 1 c size
xp 4 2 c size
xp 5 3 b size
xp 6 4 d size

```

Rectangles are created using the following command format:

```
rect ID material_ID vector1 vector2 group1 group2 ... groupn
```

Each rectangle or triangle has a material ID, which is defined in the *dotdat.dat* header. Rectangle are created using two vectors. The creation of the rectangle could be seen as the first vector extruded following the second vector. The position of the second vector doesn't matter.

At the end of the rectangle command format is a series of groups. Those groups are used for two things.

1. They are IDs of groups of points used to analyse the buckling shape. Each points of the created rectangle will belong to all groups listed at the end of the command line.
2. A finite element model is created from multiple objects like rectangles, triangles and lines. At the creation, those objects are independents from each other. But at the end of the finite element model creation, all adjacent objects edges are fused together to make a single mesh. However, sometime, the user doesn't want some objects to fuse with some other objects. This is where the groups become handy. The mesher will only fuse object having at least one group in common.

Using the tree of vectors of Figure-A IV-13, as an example, three rectangles are created using the following command lines:

```

rect 1 10 1 3 1
rect 2 10 2 4 1
rect 3 10 5 6 1

```

Those three command lines would results in the mesh shown on Figure-A IV-14. In which all elements would have square elements of size 1.

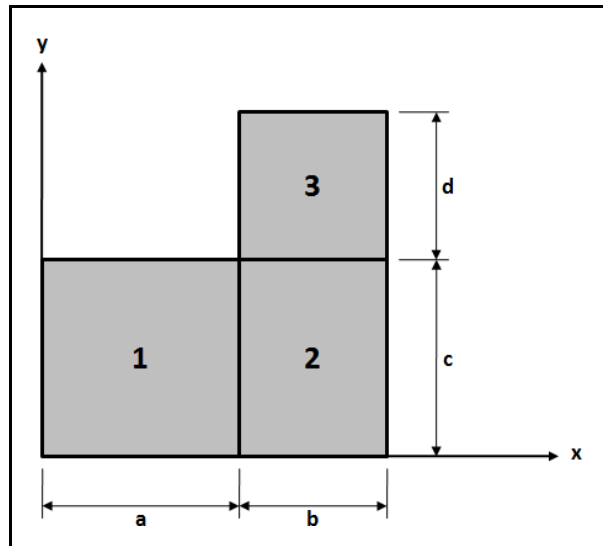


Figure-A IV-14 - 2D Mesh example

The 2D example was simple but the mesher is able to do much more than three rectangles. There are also transformation like translation and the creation of arrays of mesh from one mesh. It also allows creating CBEAM and CBUSH. The complete list of accepted command lines for the mesher is presented in Table-A IV-2 along with a brief description on what the command line does.

Table-A IV-2 - Mesher accepted command list

Accepted command lines (One space between each words)						Description
param	name	value				Create a new parameter and set a value
param +	name	name1	name2			Create a new parameter and set it to the sum of two other parameter
param-	name	name1	name2			Create a new parameter and set it to the difference of two other parameter
param *	name	name1	name2			Create a new parameter and set it to the product of two other parameter
param/	name	name1	name2			Create a new parameter and set it to the ratio of two other parameter
xp	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new topologic vector starting at the end of the parent vector and in the x positive direction
xn	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new topologic vector starting at the end of the parent vector and in the x negative direction
yp	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new topologic vector starting at the end of the parent vector and in the y positive direction
yn	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new

						topologic vector starting at the end of the parent vector and in the y negative direction
zp	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new topologic vector starting at the end of the parent vector and in the z positive direction
zn	ID	parent_ID	Length	Size		Create a new topologic vector starting at the end of the parent vector and in the z negative direction
rect	mesh_ID	Material_ID	Vector_1	Vector_2	Group_ID	Create a rectangle of CQUAD4 elements using two topologic vectors (the first vector extruded in the direction of the second)
tria	mesh_ID	Material_ID	Vector_1	Vector_2	Group_ID	Create a triangle of CTRIA3 elements using two topologic vectors (the two vectors are two sides of the triangle)
beam	mesh_ID	Material_ID	Vector_1	Vector_2	Group_ID	Create a line of CBEAM elements using two topologic vectors (on the first vector and the angle position using second vector)
bush	mesh_ID	Material_ID	Vector_1	Vector_2	Group_ID	Create a line of CBUSH elements using two topologic

						vectors (on the first vector and the angle position using second vector)
bush2	mesh_ID	Material_ID	Vector_1	Vector_2	Group_ID	Create a serie of parallel CBUSH elements using two topologic vectors (Perpendicular to the first vector and pointing in the direction of the second)
Line	mesh_ID	Vector_1	Group_ID			Create a line of CGRID elements on a topologic vector
point	mesh_ID	vector_1	Group_ID			Create a single point on the end of a topologic vector
array	vector_1	Nb_of_copy	mesh_1	(...)	(mesh_n)	Transforme meshes to arrays of meshes (one direction)
copy	vector_1	Nb_of_copy	mesh_1	(...)	(mesh_n)	Like "array" but keeping only first and last of array
move	vector_1	Nb_of_copy	mesh_1	(...)	(mesh_n)	Like "array" but keeping only last of array
force	vector_1	mesh_1	(...)	(mesh_n)		Apply a force to all CGRIDs of meshes listed (the force is distributed for uniform stress)
block	DOF	mesh_1	(...)	(mesh_n)		Block a DOF of all CGRIDs of meshes listed

ANNEXE V

Approximation models generation MatLab tool

The tool is a MATLAB algorithm used to generate a series of approximation models given a set of inputs and outputs of an unknown system (Black box). In its current version, the tool is limited to the creation of quadratic models. Starting from a complete design space covered by the given inputs and outputs, the tool will choose the best way to divide the design space and generate multiple quadratic models to estimate the system outputs and cover the whole design space. Dividing the design space and using multiples approximation models allows getting a better precision than using a single approximation model. Figure-A V-1 illustrates what the tool does and Figure-A V-2 gives an example of how the design space could be divided for a two inputs system.

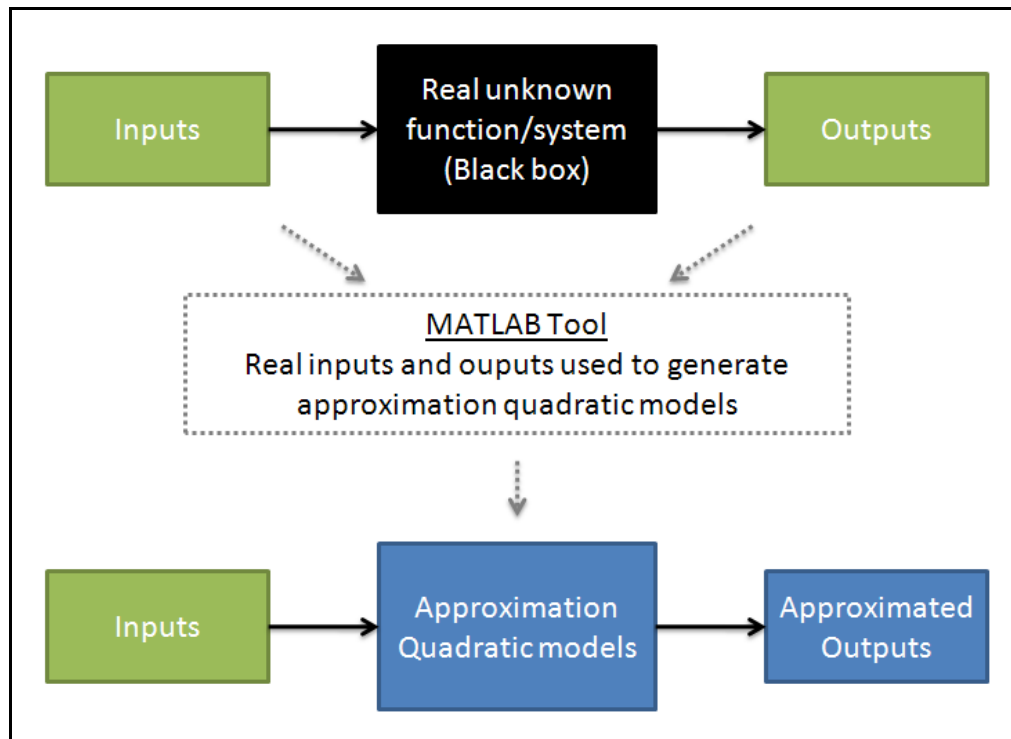


Figure-A V-1 - Quadratic approximation models generation tool

The combination of sub-design spaces is covering the whole design space and sub-design spaces are not overlapping themselves. Every position in the whole design space is covered by one approximation model but there are some exceptions (see Figure-A V-2). Indeed, there is more than one valid approximation model for a position at the interface between two or more models. For such a case, the average of all valid approximation models is used. Also, even if the position is not at an interface, it is recommended to always verify if it is near one, if it's the case, use an average or smoothing method.

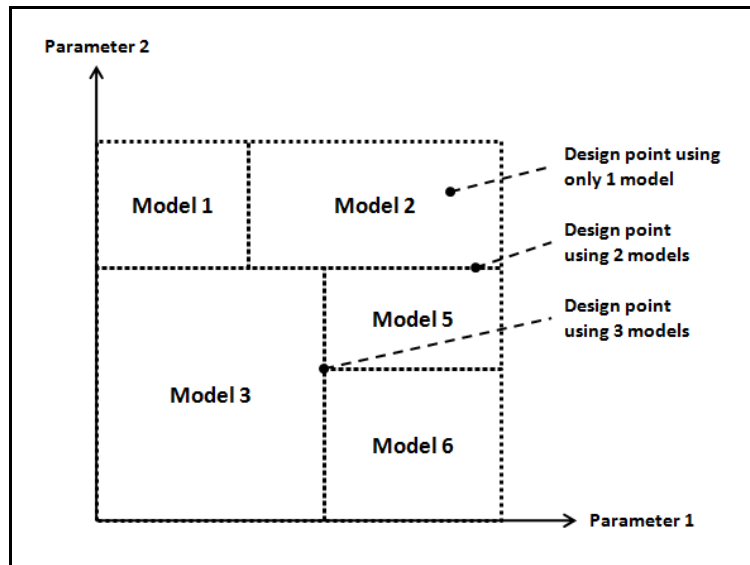


Figure-A V-2 - Example of dividing a design space

Figure-A V-3 illustrated how the tool algorithm works. As inputs, there is the Data file and a couple of dividing parameters. The main code uses cutting functions to divide the design space and generated combinations of sub-design models. It then evaluates and finds the best combination of sub-design models. It finally return the best combination found.

Section V.1 gives more information about tool inputs, section V.2 describe how the tool generates approximation models, section V.3 describes how the design space is divided and section V.4 gives more information about the tool outputs.

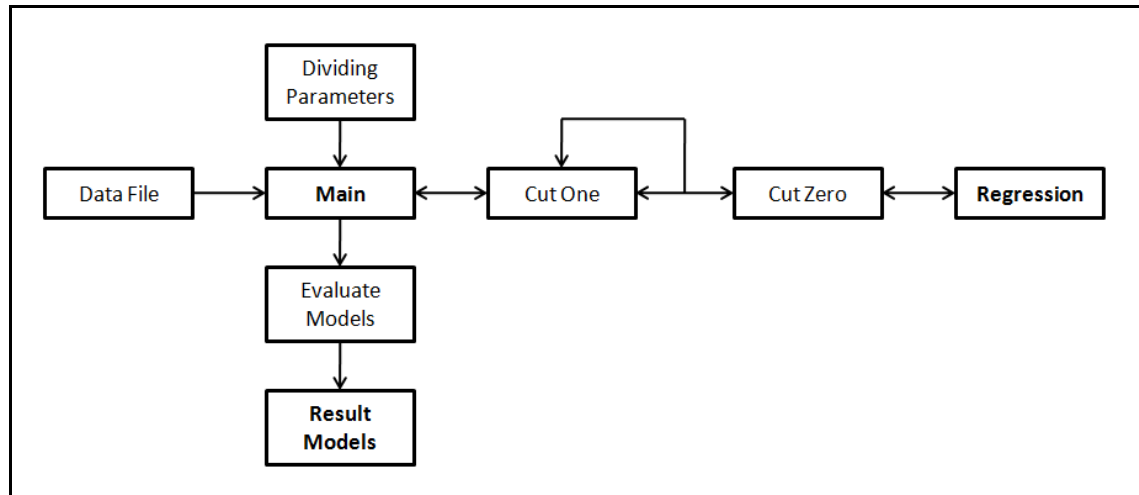


Figure-A V-3 - MATLAB Tool schema

V.1 Tool Inputs

V.1.1 Data file

The main input of the MATLAB tool is the data file containing the model inputs and outputs. Those have to be placed in an Excel file with one column for each input and one column representing the outputs. The first line for each column contains inputs or outputs names. Table-A V-1 shows an example of a Data file.

Table-A V-1 - Data file example

Input name 1	Input name 2	Input name 3	Input name 4	Output name
Input 1-1	Input 2-1	Input 3-1	Input 4-1	output 1
Input 1-2	Input 2-2	Input 3-2	Input 4-2	output 2
...
Input 1-n	Input 2-n	Input 3-n	Input 4-n	output n

Inputs and outputs column numbers

The columns order in the Data file does not matter but the tool needs to know which columns contain inputs and outputs data. This is another input of the tool entered by the user. In the

example given in Table-A V-1, the input column number list would be [1, 2, 3, 4] and the output column number would be 5.

Goodness error

The goodness error is a parameter indicating to which tolerance the error of the models have to be optimized. Errors are calculated between given outputs and models estimations. For example, if the goodness parameter is 0.1. The tool will optimize the models to have the bigger population possible within a range of error between [-10%; +10%]. The tool could results with having, for example, 94 % of the population within this tolerance of $\pm 10\%$. The tool optimizes the quadratic models for every possibility of dividing the design space and returns the best one.

Minimum completeness

The completeness of a model is the ratio of the number of data points used to generate the model compared to the minimum number of data points needed to generate the model. Having a ratio of 1 would mean that the model have exactly the number of data points needed. A completeness of less than 1 is not possible. A completeness of at least 2 or 3 is recommended. The higher the completeness, the better the models will be. Giving a minimum completeness to the MATLAB Tool will ensure that the design space is not subdivided too much that the sub-design spaces are too small and that they are generated without enough data points.

Max level

The *Max level* parameter indicates the maximum number of time the design space can be divided into sub-design spaces. For example, a *Max level* of 2 mean that the design space can be divided into two sub-design spaces and then each of those sub-design spaces can be divided into sub-sub-design spaces. The MATLAB Tool will not divide those sub-sub-design spaces again with a *Max level* of 2.

V.2 Generating quadratic models

V.2.1 Quadratic models

Each approximation model is limited for now to polynomial quadratic equation. The number of terms in the equation depends on the number of system inputs. For example, with three inputs (z_1, z_2, z_3), the quadratic equation would have the form:

$$y_n = B_0 + B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 z_3 + B_4 z_1^2 + B_5 z_1 z_2 + B_6 z_1 z_3 + B_7 z_2^2 + B_8 z_2 z_3 + B_9 z_3^2 \quad (\text{A V-1})$$

The first term is always a constant. Secondly, there is one term for each input. Then, there are the second order terms or the interaction terms.

Black box inputs are placed in the X matrix. Each line corresponds to one data point (n) and each column to one polynomial term (k). x_{nk} is the polynomial term number k of the data point number n (without the B_k coefficient). To be noted that the first term without the B_0 coefficient is reduces to 1. Also, the polynomial coefficients (B_k) are placed into the B vector.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad (\text{A V-2}) \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} \quad (\text{A V-3})$$

The system outputs are put into the Y vector. Another matrix is built from the system output is the U matrix and it is used to make the errors relative before the regression.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{A V-4}) \quad U = \begin{bmatrix} y_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_n^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A V-5})$$

The B vector is calculated using the X , Y and U matrix. This calculation is made possible using the matrix left division. It is wrong to invert the denominator of the following equation because it is close to singular. The B vector is obtained with equation A V-6 (Tofallis, 2009):

$$X'UUXB = X'UUY \quad \rightarrow \quad B = \frac{X'UUY}{X'UUX} \quad (\text{Matrix left divide}) \quad (\text{A V-6})$$

V.2.2 Other quantities

Knowing the B vector, the approximation models are known. However, some other quantities are useful to know (Tofallis, 2009). The approximated outputs of the system can now be calculated:

$$Y' = XB \quad (\text{A V-7})$$

The residuals are:

$$D = Y - Y' \quad (\text{A V-8})$$

Relative errors are:

$$E = UD \quad (\text{A V-9})$$

The sum of all squared relative error is:

$$L = E'E \quad (\text{A V-10})$$

The root mean squared with relative errors is:

$$RMSr = \sqrt{\frac{E'E}{n}} \quad (\text{A V-11})$$

This last quantity is minimized when calculating the B matrix.

V.3 Dividing the design space

The whole design space is divided into a series of sub-design spaces. Each sub-design space has its own approximation model. The best way of dividing the whole design space has to be found. The tool divides the whole design space in all possible combination of divisions. Each combination of division is evaluated and the tool returns the best one.

Evaluating a combination of sub-design models

The whole design space is divided into two sub-design spaces. Each sub-design spaces can be divided again and again until dividing limits are reached (one sub-design space being too small or the number of dividing level being reached). There is one sub-design model for each sub-design space. The quality of a combination of sub-design models is as good as the quality of its worst sub-design model. This is how a combination of sub-design models is evaluated and compared to other ones.

Evaluating one sub-design model

A sub-design model is evaluated by the proportion of the population (value between 0 and 1) that lies within the error tolerance (also a value between 0 and 1). The E matrix (equation (A V-9)) gives errors for all the population of the sub-design model.

V.4 Outputs

The tool gives the polynomial coefficients of each sub-design spaces approximation models and some other information describing models. For every output given by the tool as a matrix, there is a column for each approximation model but there is one exception, the *info* matrix. Here is a list of the tool outputs:

info

The *info* matrix describes the models approximation equation. The *info* matrix is used to know how to fill the X matrix. In this matrix, there are three lines and each column describes one polynomial term. The first two lines indicate the first and second input used for the polynomial term. The product of those two inputs will be multiply by the model coefficient B_k of the same term. If the input value in the *info* matrix is 0, it means no input to be used. This is equivalent to having the value of 1. The third line indicates the index of the term. If the index of the term is 0, it means not to use this term. For the example given in V.2.1, the *info* matrix would be:

$$info = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad (A V-12)$$

B matrix

The *B* matrix contains the coefficients of approximation models for each sub-design spaces, one column for each sub-design space and one line for each polynomial term. The *B* matrix alone defines all approximation models.

range_min and range_max

The *range_min* and *range_max* matrices define the valid ranges of all models. The inputs values have to be in the valid range for a model to be used.

goodness

The goodness matrix indicates the quality of each sub-design models generated by the tool. It indicates the proportion of the population within the error tolerance used with the tool to optimize. There is one line of number between 0 and 1 (one column for each model).

completeness

The completeness matrix indicates the completeness of each sub-design models generated by the tool (see section V.1.1 for completeness definition). There is one value (one column) for each model.

ANNEXE VI

Formulation développée avec la méthode de Rayleigh–Ritz

Cette section présente une formulation développée avec la méthode de Rayleigh-Ritz permettant de calculer le chargement de flambage global d'une coque cylindrique avec raidisseurs et cadres excentriques placés à l'extérieur (Sadeghifar, Bagheri et Jafari, 2010). La formulation est développée pour un matériau isotrope et pour un cas de chargement en compression suivant une direction parallèle à l'axe du cylindre. La formulation présentée ici sera également analysée pour montrer brièvement comment elle pourrait être adaptée pour les matériaux composites et pour un chargement en flexion. Le positionnement des raidisseurs et cadres (intérieur ou extérieur) sera également analysé.

La formulation présentée dans cette section n'est pas prête à être utilisée par l'outil de dimensionnement. Elle devra être adaptée dans les travaux futurs avant d'être utilisée. La formulation de Shanley peut la remplacer jusqu'à ce qu'une meilleure formulation soit développée. Sans, toutefois oublier qu'il est nécessaire d'évaluer une nouvelle valeur de C_f pour les fuselages d'avions.

VI.1 Positionnement et déformation

Le positionnement sur la coque cylindrique de rayon R et de longueur L est exprimé en coordonnées cylindriques, soit x , θ et z , correspondant aux directions axiale, angulaire et radiale, respectivement. Les déplacements dans les directions x , θ et z sont représentés par u , v et w , respectivement.

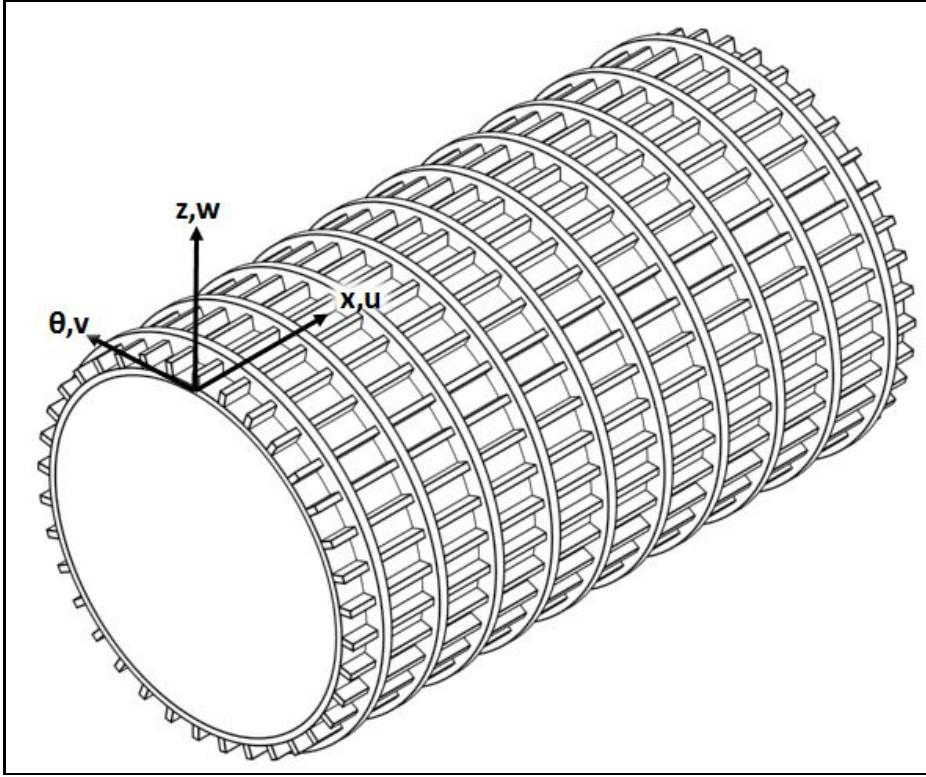


Figure-A VI-1 - Système d'axes sur une coque cylindrique avec raidisseurs et cadres

Les déplacements en tout point peuvent être exprimés en fonction des déplacements de la surface médiane de la coque cylindrique, soit u_0 , v_0 et w_0 , respectivement. Ils sont calculés à l'aide des équations A VI-1, A VI-2 et A VI-3 :

$$u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) + z \left(-\frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial x} \right) \quad (\text{A VI-1})$$

$$v(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) + z \left(-\frac{\partial w_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{v_0(x, \theta)}{R} \right) \quad (\text{A VI-2})$$

$$w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta) \quad (\text{A VI-3})$$

La relation entre les déformations (ε) et les déplacements sont calculés à l'aide des équations A VI-4, A VI-5 et A VI-6 :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + z\kappa \quad (\text{A VI-4})$$

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{A VI-5})$$

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{1}{R} \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{A VI-6})$$

Les déplacements des cadres r_i et des raidisseurs s_j sont calculés à l'aide des équations A VI-7 et A VI-8 :

$$\left. \begin{aligned} u_{r_i} &= u_0 + e_r \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v_{r_i} &= v_0 \left(1 + \frac{e_r}{R} \right) + e_r \left(-\frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \frac{v_0}{R} \right) \\ w_{r_i} &= w_0 \end{aligned} \right\} \text{pour } x = x_{r_i} \quad (\text{A VI-7})$$

$$\left. \begin{aligned} u_{s_j} &= u_0 + e_s \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v_{s_j} &= v_0 \left(1 + \frac{e_s}{R} \right) + e_s \left(-\frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \frac{v_0}{R} \right) \\ w_{s_j} &= w_0 \end{aligned} \right\} \text{pour } \theta = \theta_{s_j} \quad (\text{A VI-8})$$

Les distances des centres d'inertie des raidisseurs et des cadres par rapport au plan médian de la coque cylindrique sont exprimées par e_r et e_s , respectivement. Les positions, les déplacements et les déformations ne dépendent pas du matériau ou du chargement. Ils peuvent donc rester tels quels pour une formulation avec un matériau composite et un chargement en flexion. Toutefois, le positionnement des raidisseurs et des cadres à l'intérieur ou à l'extérieur de la coque a pour effet de changer le signe de e_r et e_s , ce qui change le déplacement qui leur est associé.

VI.2 Déformée de flambage

On suppose que la déformée de flambage suit une forme sinusoïdale dans les trois directions.

$$u_0(x, \theta) = c_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (\text{A VI-9})$$

$$v_0(x, \theta) = c_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) \quad (\text{A VI-10})$$

$$w_0(x, \theta) = c_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (\text{A VI-11})$$

Cette déformée est uniforme sur toute la circonférence. Elle convient à un chargement uniforme comme la compression longitudinale et des conditions frontières simplement supportées aux extrémités. Par contre, elle ne convient pas pour un cas de chargement en flexion. Pour un tel chargement, les équations de la déformée doivent permettre d'obtenir plus de déplacement du côté en compression que du côté en tension. Il faudra probablement ajouter des coefficients qui sont dépendants de l'angle pour obtenir cet effet.

VI.3 Calculs énergétiques

L'énergie de déformation dans une coque cylindrique isotrope (U_{sh}) est calculée :

$$U_{sh} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{\theta\theta}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\theta}^2 \right] R dz d\theta dx \quad (\text{A VI-12})$$

où E et ν sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau isotrope, respectivement. Pour une coque en matériau composite, une autre équation devra être utilisée.

L'énergie de déformation d'un cadre i est calculée :

$$\begin{aligned}
 U_{r_i} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} & \left[\frac{E_r A_r}{R + e_r} \left(\frac{\partial v_{r_i}}{\partial \theta} + w_{r_i} \right)^2 + \frac{E_r I_{x_r}}{(R + e_r)^3} \left(w_{r_i} + \frac{\partial^2 w_{r_i}}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{E_r I_{z_r}}{R + e_r} \left(\frac{\partial w_{r_i}}{\partial x} - \frac{1}{R + e_r} \frac{\partial^2 u_{r_i}}{\partial \theta^2} \right)^2 \\
 & \left. + \frac{G_r J_r}{R + e_r} \left(\frac{\partial^2 w_{r_i}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R + e_r} \frac{\partial u_{r_i}}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{A VI-13}$$

Les quantités EA , EI et GJ sont des rigidités de poutre, soit la rigidité en compression, en flexion et en torsion, respectivement. L'indice r indique qu'il s'agit des raidisseurs. Ces quantités peuvent être calculées pour des poutres en matériaux composites également. Le même principe s'applique à l'équation de l'énergie de déformation des raidisseurs, qui est :

$$\begin{aligned}
 U_{s_j} = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[E_s A_s \left(\frac{\partial u_{s_j}}{\partial x} \right)^2 + E_s I_{\theta_s} \left(\frac{\partial^2 w_{s_j}}{\partial x^2} \right)^2 + E_s I_{z_s} \left(\frac{\partial^2 v_{s_j}}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{G_s J_s}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_{s_j}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{A VI-14}$$

L'indice s indique qu'il s'agit des cadres. Pour les raidisseurs et les cadres, le positionnement à l'intérieur ou à l'extérieur de la coque a un effet sur l'énergie de déformation de ceux-ci. Le signe de e_r et e_s a un effet sur la valeur de u_{r_i} , v_{r_i} , u_{s_j} et v_{s_j} . Le signe de e_r a de plus un effet direct dans l'équation de l'énergie de déformation des raidisseurs. Donc, à priori, ces équations permettent de mettre les raidisseurs et les cadres à l'intérieur de la coque et de calculer leur énergie de déformation. Cette hypothèse devra quand même être vérifiée avec des simulations par éléments finis et des essais expérimentaux.

Le travail de la charge appliquée est calculé :

$$V_{N_x} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{N_x R}{2} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) \right] d\theta dx \quad (\text{A VI-15})$$

où N_x est le chargement par unité de longueur sur la circonférence de l'extrémité de la coque cylindrique. Même si cette équation a été présentée pour le chargement en compression pure, il peut être calculé pour un chargement qui n'est pas uniforme, comme la flexion. Les moments appliqués sur les extrémités de la coque cylindrique correspondant à la flexion peuvent être transformés en des forces longitudinales réparties, mais non uniformes. L'énergie totale U_{tot} est :

$$U_{tot} = U_{sh} + \sum_{j=1}^{N_s} U_{s_j} + \sum_{i=1}^{N_r} U_{r_i} + V_{N_x} \quad (\text{A VI-16})$$

VI.4 Résolution du problème

La résolution du problème suivant la méthode de Rayleigh-Ritz est définie par l'équation A VI-17.

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial C_i} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A VI-17})$$

Après substitution, celle-ci doit être reformulée sous la forme de l'équation A VI-18, soit l'équation des valeurs propres.

$$[[K] - N_x[G]]\{C_i\} = 0 \quad (\text{A VI-18})$$

Pour résoudre cette équation, on pose le déterminant de la matrice $[K] - N_x[G]$ nul, ce qui permet d'obtenir le chargement de flambage global N_x et les modes de flambage m et n .

ANNEXE VII

ICCM19 ARTICLE : EXACT BUCKLING SOLUTION OF COMPOSITE WEB/FLANGE ASSEMBLY¹

< J. Sauvé^{2*}, M. Dubé², F. Dervault³, G. Corriveau³

²Ecole de technologie supérieure, Montreal, Canada

³Airframe stress, Advanced Structures, Bombardier Aerospace, Montreal, Canada

*Corresponding author (jeremie.sauve.1@ens.etsmtl.ca)

Keywords: *buckling, plate, web, flange, composite*

¹Sauvé, J., M. Dubé, F. Dervault et G. Corriveau. 2013. « Exact buckling solution of composite web/flange assembly ». In *19th International Conference on Composite Materials (ICCM19)*. (Montréal, Canada, 28 juillet—2 août 2013), p. 4637-4644. Montréal : Canadian Association for Composite Structures and Materials (CACSMa).

1 Introduction

Composite materials are increasingly being used in aerospace structures and current design methodologies need to be improved in order to achieve lightweight efficient structures at low cost. The orthotropic properties of composite materials complexify analytical formulation development, especially for instability problems such as buckling. Buckling needs to be considered when designing a number of aerospace structures; for instance, it is an important design criteria for frames used to reinforce fuselage skins. In such a construction, the frames are attached to the fuselage skin and the junction between the frames and the skin provides some stiffness that can help prevent buckling. The web of the frames can be assumed to be a composite plate with a composite flange at one edge. Neglecting the radius of curvature, the frames buckling problem becomes one of a composite plate with a free flange and some boundary conditions on the remaining edges (Fig.1).

Many authors worked on buckling of composite plates with a combination of free, simply supported, clamped and rotationally restrained boundary conditions (Bank et Jiansheng, 1996; Banks et Rhodes, 1983; Barbero et Raftoyiannis, 1993; Kollar, 2003; Mittelstedt,

2007; Qiao et Shan, 2005; Shan et Qiao, 2008) and a few authors proposed a formulation for plates reinforced by a flange. Mittelstedt (Mittelstedt et Schagerl, 2010) worked on the case of a composite plate having three simply supported edges and one edge reinforced by a free flange. He presented an exact analytical formulation and some approximate formulations for the prediction of the buckling load that was in good agreement with results of finite element analysis. In the present work, we develop an analytical formulation for the local and lateral buckling analyses of a composite plate, representing the web of a frame reinforced with a flange, assuming a different set of boundary conditions (see Fig.1). In effect, Mittelstedt used a simply supported boundary condition at the edge representing the junction with the fuselage skin. In the present study, this edge is assumed to be clamped, as it is shown that having a simply supported boundary condition is too conservative. A comparison between the predictions of the analytical formulation and those of finite element analyses is performed, in order to validate the developed analytical model.

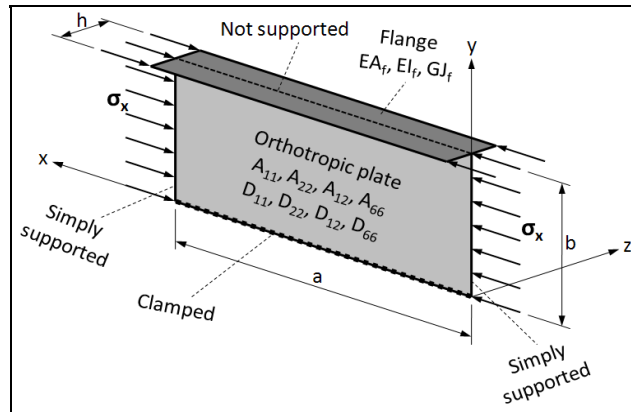


Fig.1 - Considered structure

2 Problem statement

The considered structure is an orthotropic web, referred to as orthotropic plate on Fig. 1, of length a and width b . The web is simply supported and loaded in compression (σ_x) at $x = 0$ and $x = a$ and clamped at $y = 0$. A free flange of width h is considered at $y = b$, as shown on Fig.1. This flange consists of an orthotropic laminate and is represented by a extensional

stiffness (Eaf), a bending stiffness (EIf) and a torsional stiffness (GJf). The stress-strain relationship is based on classical laminate plate theory (Gibson, 2011; Kollar et Springer, 2003) and symmetric and balanced stacking sequences are assumed. Thus, the bending-torsion coupling of the plate is neglected. The web thickness is assumed to be small compared to its dimensions and the displacements are linear and small compared to the thickness of the web. The following expression describes the relationship between the bending moments M and the laminate curvature κ^0 .

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

The matrix coefficients D_{ij} ($i, j = 1, 2$ and 6) are the bending stiffness coefficients of the laminate. From the classical laminate theory, a relationship between curvature and deformation is given by:

$$\kappa_x^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y^0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy}^0 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

where w is the out of plane displacement of the web. The web governing differential equation is:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

The two loaded edges being simply supported at $x = 0$ and $x = a$, the deformation shape in the x direction is assumed to be sinusoidal:

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \varphi(y) \quad (4)$$

where $\varphi(y)$ is assumed to be a function of y only and m expresses the number of half-waves in the buckling mode. Finding the fundamental solution for $\varphi(y)$ (Qiao et Zou, 2002), the deformation equation becomes:

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{x\pi m}{a}\right) \left[B_1 \cosh\left(\frac{k_1 y \pi m}{a}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{k_1 y \pi m}{a}\right) + B_3 \cos\left(\frac{k_2 y \pi m}{a}\right) + B_4 \sin\left(\frac{k_2 y \pi m}{a}\right) \right] \quad (5)$$

where $B_{1,2,3,4}$ are unknown parameters and k_1 and k_2 are calculated (Qiao et Zou, 2002):

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{D_{22}} \left(\sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left(N_x \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 - D_{11} \right)} \pm (D_{12} + 2D_{66}) \right)} \quad (6)$$

2.1 Boundary conditions

A clamped boundary condition is considered at $y = 0$:

$$w|_{y=0} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (8)$$

These two equations reduce the number of unknown parameters $B_{1,2,3,4}$ from four to two:

$$B_3 = -B_1 \quad (9)$$

$$B_4 = -B_2 \frac{k_1}{k_2} \quad (10)$$

The deformation shape equation is then reduced to:

$$w(x, y) = \sin\left(x \frac{\pi m}{a}\right) \left[B_1 \left(\cosh\left(\frac{k_1 y \pi m}{a}\right) - \cos\left(\frac{k_2 y \pi m}{a}\right) \right) + B_2 \left(\sinh\left(\frac{k_1 y \pi m}{a}\right) - \frac{k_1}{k_2} \sin\left(\frac{k_2 y \pi m}{a}\right) \right) \right] \quad (11)$$

At $y = b$, the bending moment of the web works against the torsion of the flange, as stipulated by Mittelstedt [10]:

$$D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - GJ_f \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (12)$$

Finally, a relationship between shear force in the web and the bending and compression in the flange exists at $y = b$:

$$EI_f \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \delta N_x b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (13)$$

where N_x is the load per unit width on the web and δ is the ratio of the flange extensional stiffness (EA_f) to the web extensional stiffness (EA_w):

$$\delta = \frac{EA_f}{EA_w} = \frac{EA_f}{E_x b t} \quad (14)$$

where E_x is the equivalent Young's modulus of the web in the x direction and t is the thickness of the web.

2.2 Solution

Equations (12) and (13) cannot be solved directly. Instead, the system of two equations is solved by setting its determinant equal to zero:

$$\begin{aligned} & V_1 \cosh\left(k_1 b \frac{\pi m}{a}\right) \cos\left(k_2 b \frac{\pi m}{a}\right) + V_2 \cosh\left(k_1 b \frac{\pi m}{a}\right) \sin\left(k_2 b \frac{\pi m}{a}\right) + \\ & V_3 \sinh\left(k_1 b \frac{\pi m}{a}\right) \cos\left(k_2 b \frac{\pi m}{a}\right) + V_4 \sinh\left(k_1 b \frac{\pi m}{a}\right) \sin\left(k_2 b \frac{\pi m}{a}\right) + V_5 = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

Where

$$V_1 = -2GJ_f \left(EI_f \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - N_x b d \right) - 2D_{12}(D_{12} + 4D_{66}) + 2D_{22}^2 k_1^2 k_2^2 + 2D_{22}(D_{12} + 2D_{66})(k_1^2 - k_2^2) \quad (15b)$$

$$V_2 = D_{22}(k_1^2 + k_2^2) \left[GJ_f \left(\frac{\pi m}{a} \right) k_2 + \frac{1}{k_2} \frac{a}{\pi m} \left(EI_f \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - N_x b d \right) \right] \quad (15c)$$

$$V_3 = D_{22}(k_1^2 + k_2^2) \left[GJ_f \left(\frac{\pi m}{a} \right) k_1 - \frac{1}{k_1} \frac{a}{\pi m} \left(EI_f \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - N_x b d \right) \right] \quad (15d)$$

$$V_4 = -\frac{1}{2} \frac{k_2}{k_1} \left[V_1 \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 - 1 \right) - 4D_{66}D_{22}(k_1^2 + k_2^2) \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + 1 \right) \right] \quad (15e)$$

$$V_5 = D_{22}^2(k_1^2 + k_2^2)^2 - V_1 \quad (15f)$$

Solving equation (15) for N_x is done using a numeric algorithm because of the transcendental nature of this equation.

3 Results

The formulation just developed for a clamped boundary condition at $y = 0$ is compared to that of a simply supported boundary condition using a simple example representing a typical fuselage frame. The frame web has a length $a = 450$ mm and a height $b = 85$ mm. The width of the flange h is ranged from 0 mm to 100 mm. The web stacking sequence is $[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_4^\circ)(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_2^\circ)]_5$ leading to a total thickness of 3.48 mm. The flange stacking sequence is $[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_4^\circ)_2(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_2^\circ)]_5$ corresponding to a total thickness of 5.51 mm. The flange and web are made of the same fibre reinforced material having the properties:

$$E_{11} = 149 \text{ GPa};$$

$$E_{22} = 10.1 \text{ GPa};$$

$$\nu = 0.33;$$

$$G_{12} = 4.55 \text{ GPa};$$

$$\text{Ply thickness} = 0.145 \text{ mm}.$$

Buckling loads were predicted using the analytical formulation presented in the current work for the case of a clamped boundary condition (at $y = 0$), and compared to those of Mittlestedt for the case of a simply supported boundary condition (at $y = 0$). The analytical results were compared to the finite element analysis method using Nastran software. In the finite element model (Fig.2), the plates, both web and flange, are made of CQUAD4 elements having 4 nodes with 6 degrees of freedom (x, y, z translations and x, y, z rotations). A convergence study was conducted in order to refine the mesh to satisfactory results. For the size of the plates considered in this paper, the final mesh consists of square element of 5 mm width. Forces are applied on nodes of the web and flange edges at $x = 0$ and $x = b$ (Fig.2). The first buckling mode obtained for each flange width was considered and the corresponding buckling load was recorded. Comparison of buckling loads predicted by the analytical

formulation and finite element model are presented on Fig.3 for simply supported (Mittlestedt) and clamped boundary conditions at $y = 0$. Analytical formulation seems to be in good agreement with the finite element analysis for a flange width below 70 mm (clamped boundary condition) and 78 mm (simply supported boundary condition). With larger flanges, the buckling mode is changed from web buckling (local or lateral) to a flange local buckling mode (Fig.3), which is not captured in the analytical formulation. This flange local buckling mode must be studied using a different formulation as the analytical formulation presented in this study focuses on web buckling only. The results also demonstrate that, in this case, having a flange larger than 42 mm gives no additional stiffness to the frame against buckling. This can be seen as a minimal yet acceptable flange width (Mittelstedt et Schagerl, 2010) providing simply supported condition to the web.

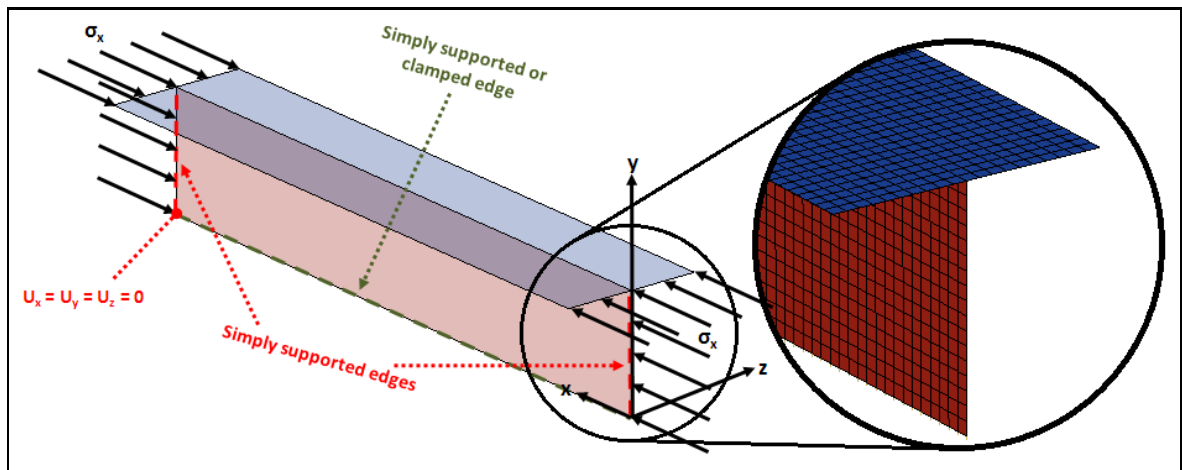


Fig.2 - Finite element model of considered structure, *displacements are indicated by U.*

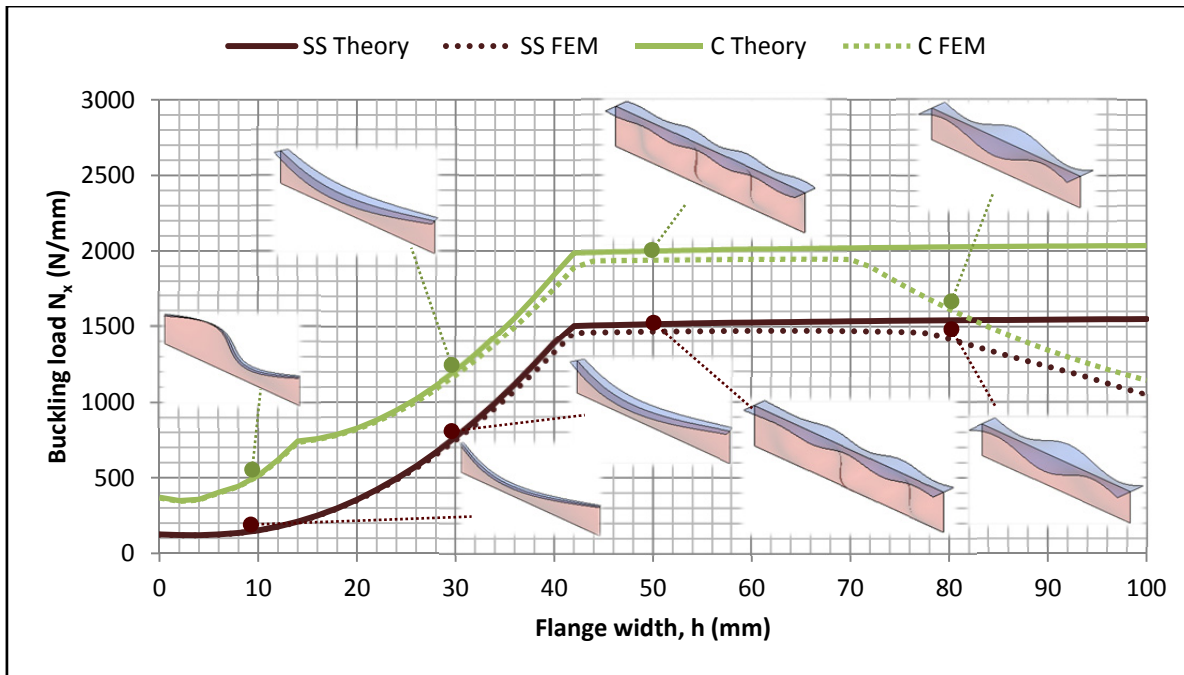


Fig.3 - Buckling load predicted by analytical formulation (Theory) versus finite element method (FEM). The simply supported boundary condition at $y = 0$ is indicated by (SS) and the clamped boundary condition is indicated by (C).

The selected example shows that using a simply supported rather than a clamped boundary condition (at $y = 0$) reduces the predicted buckling load by 30% for large flanges and even more for small flanges. Assuming the real-life condition is closer to the clamped boundary condition, the simply supported boundary condition would lead to overdesign of the composite frame.

With a real airplane fuselage, the skin-stringer assembly gives a support to the frame web at the skin location ($y = 0$). The support that the skin-stringer assembly provides to the web is somewhere between the simply supported and clamped boundary conditions. To compare the simply supported and clamped boundary conditions with a realistic case, a skin-stringer support example is presented. This example represents a typical skin-stringer assembly used in the aerospace industry. The stringer consists of an I-beam and is assumed to be perfectly fused to the skin. Dimensions and properties of the skin-stringer assembly are presented in Table 1. The finite element models used to find the rotational stiffness of the skin-stringer

assembly (at $y = z = 0$) are presented in Fig.4 and Fig.5. In those models, a transverse load is applied on the frame to create a moment at $y = z = 0$ and the deformation angle is recorded. As shown on Fig.6, the average angle (neglecting edge effect) obtained with the skin-stringer assembly is matched using rotational springs. Then, those rotational springs are added to the frame finite element model (Fig.2) at $y = 0$. Those rotational springs are a third boundary condition for the web. Then, all three boundary conditions are compared using finite element analysis and results are shown on Fig.7. The results confirmed the previous assumption that the buckling load of a typical skin-stringer assembly is much closer to the buckling load of a clamped boundary condition than that of a simply supported boundary condition.

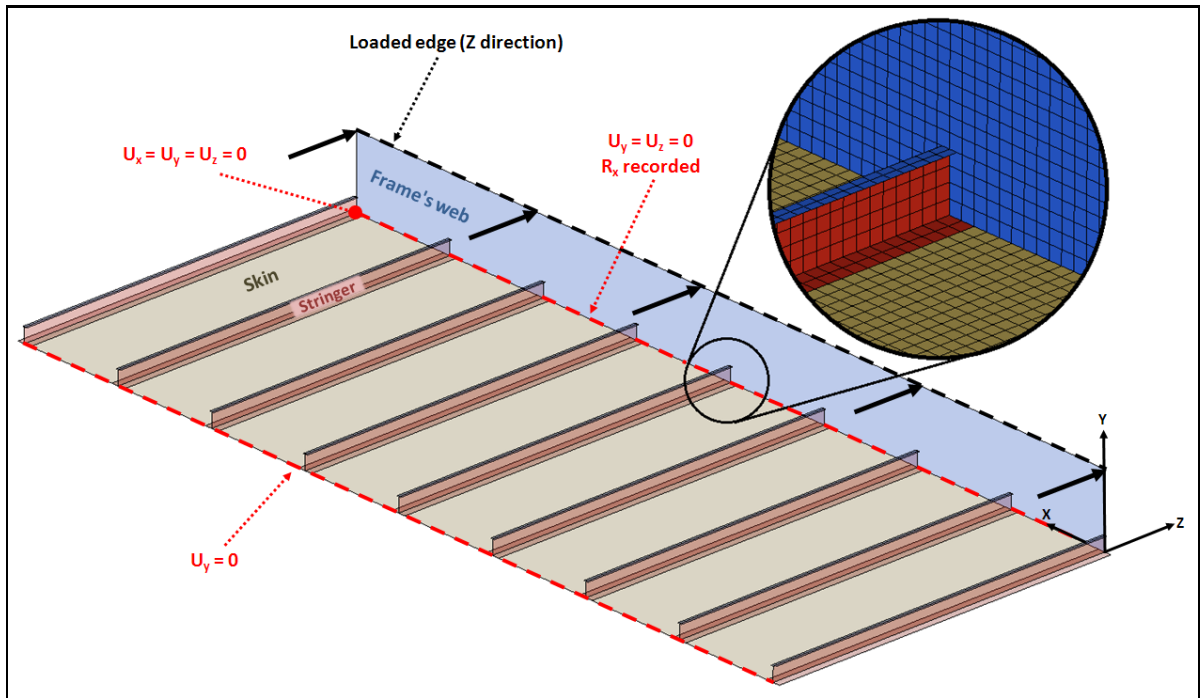


Fig.4 - Finite element model (skin, stringer and frame web) used to find the skin-stringer rotational stiffness at $y = 0$, *displacements are indicated by U and rotation by R .*

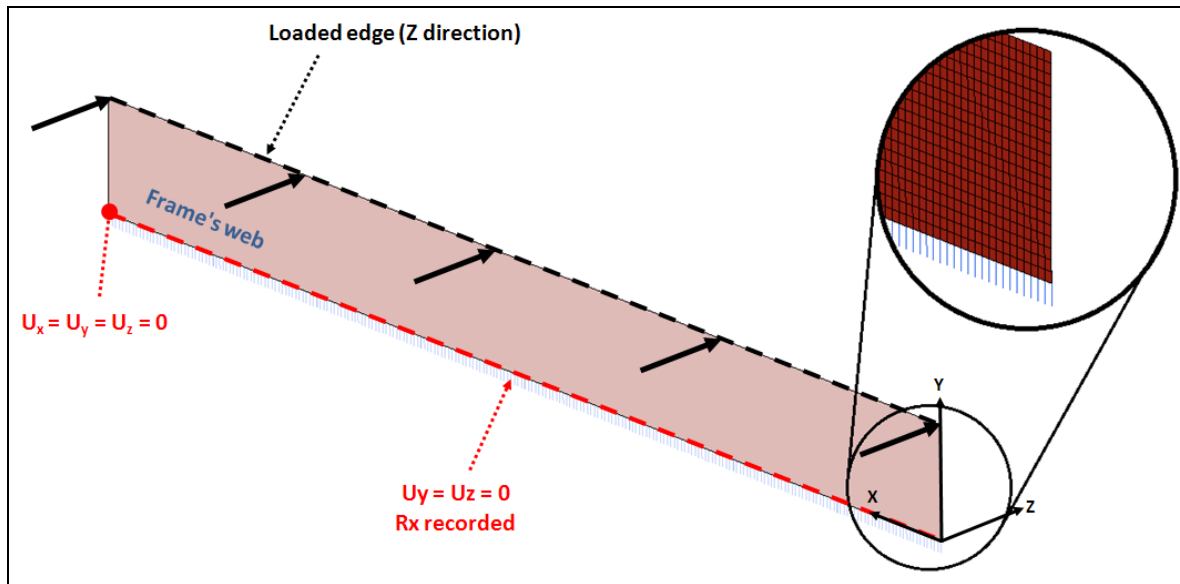


Fig.5 - Finite element model (frame web and rotational springs) used to find the skin-stringer rotational stiffness at $y = 0$, displacements are indicated by U and rotation by R .

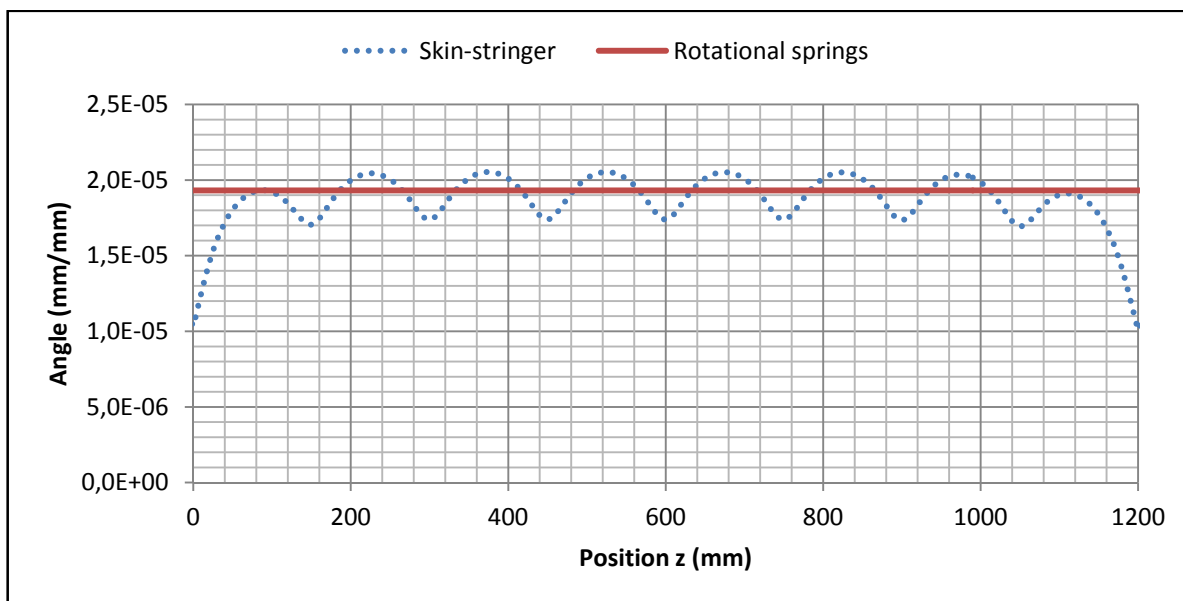


Fig.6 - Rotation at $y = 0$ using the skin-stringer and rotational springs finite element results.

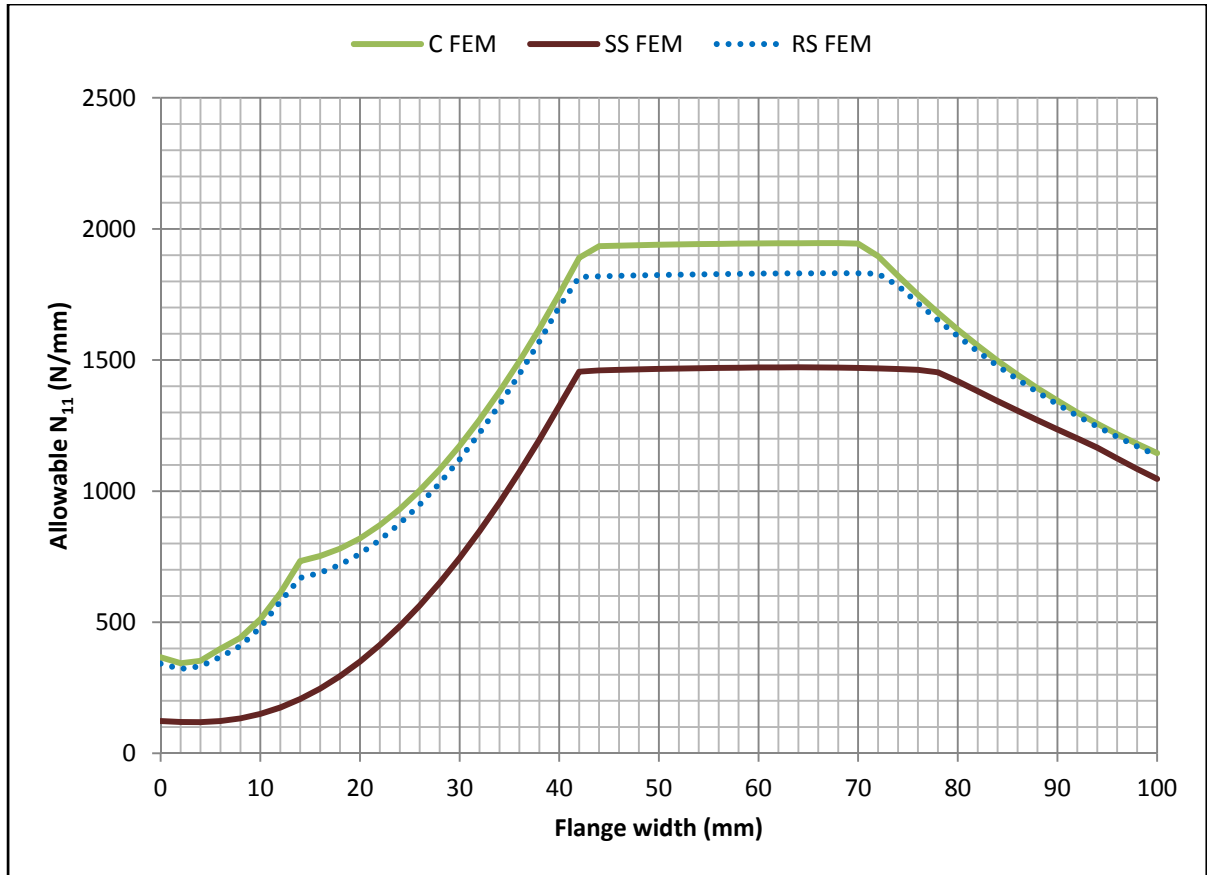


Fig.7 - Predicted buckling load for various boundary conditions at $y = 0$ using the finite element method. Boundary conditions are indicated by SS (simply supported), C (clamped) and RS (rotational springs representing the skin-stringer support). The properties of the skin-stringer assembly are indicated in Table 1.

Table 1 - Dimensions and laminates of the skin-stringer assembly

	Skin-Stringer		
	Laminate	Thickness	Size
	Name	mm	mm
Inner flange	$[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_4^\circ)(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_2^\circ)]_s$	3.48	3
Web	$[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_2^\circ)]_s$	1.45	20
Bottom flange	$[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0_2^\circ)]_s$	1.45	10
skin	$[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ)]_s$	1.16	
Stringer spacing			150

4 Conclusion and future work

The present work demonstrated that assuming a simply supported boundary condition at the skin is a conservative assumption. On the other hand, the proposed formulation for a clamped boundary condition is closer to the reality but overestimates the buckling loads. Therefore, a mathematical formulation for the case of a rotationally restraining boundary condition will be developed in the future. This case would better represent the real-life boundary condition, which is somewhere between the simply supported and clamped boundary conditions. This will allow the development of efficient lightweight frames.

The formulation presented in the current paper is not a closed-form solution and needs to be solved numerically. In order to provide the aerospace industry with a quick way of estimating the buckling load of a frame, an approximate closed-form formulation should be developed in the future. Furthermore, the straight web-flange formulation presented in this study should be extended to incorporate the radius effect in order to get a more accurate representation of a real aerospace frame.

Acknowledgments

This work was supported by NSERC, FRQNT and Bombardier Aerospace through the BMP Industrial Innovation **Scholarships** Program.

References

- [1] W. M. Banks and J. Rhodes, "INSTABILITY OF COMPOSITE CHANNEL SECTIONS," in *Composite Structures 2: Proceedings of the 2nd International Conference.*, Paisley, Scotl, 1983, pp. 442-452.
- [2] L. C. Bank and Y. Jiansheng, "Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges," *Thin-Walled Structures*, vol. 24, pp. 83-96, 1996.
- [3] E. J. Barbero and I. G. Raftoyiannis, "Local buckling of FRP beams and columns," *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 5, pp. 339-355, 1993.

- [4] C. Mittelstedt, "Stability behaviour of arbitrarily laminated composite plates with free and elastically restrained unloaded edges," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49, pp. 819-33, 2007.
- [5] L. P. Kollar, "Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections," *Journal of Structural Engineering*, vol. 129, pp. 1503-1513, 2003.
- [6] P. Qiao and L. Shan, "Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes," *Composite Structures*, vol. 70, pp. 468-483, 2005.
- [7] L. Shan and P. Qiao, "Explicit local buckling analysis of rotationally restrained composite plates under uniaxial compression," *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 126-140, 2008.
- [8] C. Mittelstedt and M. Schagerl, "A composite view on Windenburg's problem: Buckling and minimum stiffness requirements of compressively loaded orthotropic plates with edge reinforcements," *MS International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, pp. 471-484, 2010.
- [9] R. F. Gibson, *Principles of composite material mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2011.
- [10] L. P. Kollar, G. S. Springer, and K. Novel, *Mechanics of composite structures*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2003.
- [11] P. Qiao and G. Zou, "Local buckling of elastically restrained fiber-reinforced plastic plates and its application to box sections," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, pp. 1324-1330, 2002.

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bank, L. C., et Yin Jiansheng. 1996. « Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges ». *Thin-Walled Structures*, vol. 24, n° 1, p. 83-96.
- Banks, W. M., et J. Rhodes. 1983. « INSTABILITY OF COMPOSITE CHANNEL SECTIONS ». In *Composite Structures 2: Proceedings of the 2nd International Conference*. (Paisley, Scotl), p. 442-452. Applied Science Publ.
- Barbero, Ever J. 1999. *Introduction to composite materials design*. Philadelphia, PA: Taylor and Francis.
- Barbero, Ever J., et Ioannis G. Raftoyiannis. 1993. « Local buckling of FRP beams and columns ». *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 5, n° 3, p. 339-355.
- Becker, Herbert United States National Advisory Committee for Aeronautics. 1958. *Handbook of structural stability. Part 6 - Strength of stiffened curved plates and shells*. Washington, D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Block, David L. 1966. « Buckling of Eccentrically Stiffened Orthotropic Cylinders Under Pure Bending ». *National Aeronautics Space Administration Hampton Va Langley Research Cen, T. E. R.*
- Bogetti, Travis A., Christopher P. R. Hoppel, Vasyl M. Harik, James F. Newill et Bruce P. Burns. 2004a. « Predicting the nonlinear response and failure of composite laminates: correlation with experimental results ». *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 3-4, p. 477-485.
- Bogetti, Travis A., Christopher P. R. Hoppel, Vasyl M. Harik, James F. Newill et Bruce P. Burns. 2004b. « Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates ». *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 3-4, p. 329-342.
- Bruhn, E. F. 1973. *Analysis and design of flight vehicle structures*. Indianapolis: S.R. Jacobs.
- Bryan, George Hartley (54 - 67). 1890. *On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the "buckling" of the sides of a ship* (December 11).
- CMH-17. 2012. *Composite materials handbook, National Institute for Aviation Research*. [Warrendale, Pa.]: SAE International on behalf of CMH-17, a division of Wichita State University.

- Cuntze, R. G. 2004. « The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multi-directional laminates—part B ». *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 3–4, p. 487-516.
- Cuntze, R. G., et A. Freund. 2004. « The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates ». *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 3–4, p. 343-377.
- Gibson, Ronald F. 2011. *Principles of composite material mechanics*. Coll. « Mechanical engineering series ». Boca Raton: CRC Press.
- Hinton, M.J., A.S. Kaddour et P.D. Soden. 2004. *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier Science [Imprint].
- Hoff, N. J. Klein Bertram United States National Advisory Committee for Aeronautics. 1944. *The inward bulge type buckling of monocoque cylinders. I - Calculation of the effect upon the buckling stress of a compressive force, a nonlinear direct stress distribution, and a shear force*. Washington D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Icardi, U., S. Locatto et A. Longo. 2007. « Assessment of recent theories for predicting failure of composite laminates ». *Applied Mechanics Review*, vol. 60, n° 2, p. 76-86.
- Kassapoglou, Christos. 2010. *Design and analysis of composite structures : with applications to aerospace structures*. Reston, Va.; United Kingdom : b John Wiley & Sons: American Institute of Aeronautics and Astronautics ;.
- Kollar, L. Peter, et George S. Springer. 2003. *Mechanics of composite structures*. Cambridge New York: Cambridge University Press.
- Kollar, Laszlo P. 2002. « Buckling of unidirectionally loaded composite plates with one free and one rotationally restrained unloaded edge ». *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, n° 9, p. 1202-1211.
- Kollar, Laszlo P. 2003. « Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections ». *Journal of Structural Engineering*, vol. 129, n° 11, p. 1503-1513.
- Kuraishi, Akira, Stephen W. Tsai et Kevin K. S. Liu. 2002. « A progressive quadratic failure criterion, part B ». *Composites Science and Technology*, vol. 62, n° 12–13, p. 1683-1695.
- Kweon, Jin-Hwe. 2002. « Crippling analysis of composite stringers based on complete unloading method ». In., 27-30 Vol. 80, p. 2167-2175. Coll. « Computers and Structures »: Elsevier Ltd. < [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00272-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00272-9) >.

- Leissa, Arthur W. 1985. *Buckling of laminated composite plates and shell panels*. Flight dynamics laboratory, 439 p.
- Leissa, Arthur, W. 1987. « A Review of Laminated Composite Plate Buckling ». *Applied Mechanics Reviews*, vol. 40, n° 575, p. 5.
- Liu, Kuo-Shih, et Stephen W. Tsai. 1998. « A PROGRESSIVE QUADRATIC FAILURE CRITERION FOR A LAMINATE ». *Composites Science and Technology*, vol. 58, n° 7, p. 1023-1032.
- Machado, Sebastian P., et Victor H. Cortinez. 2005. « Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation ». *Engineering Structures*, vol. 27, n° 8, p. 1185-1196.
- Majak, J., et S. Hannus. 2003. « Orientational Design of Anisotropic Materials Using the Hill and Tsai–Wu Strength Criteria ». *Mechanics of Composite Materials*, vol. 39, n° 6, p. 509-520.
- MIL-HDBK-17-3F. 2002. *Composite materials handbook - Volume 3. Polymer Matrix Composites Materials Usage, Design, And Analysis*. [United States, Washington, D.C.]: U.S. Dept. of Defense.
- Mittelstedt, C. 2007. « Stability behaviour of arbitrarily laminated composite plates with free and elastically restrained unloaded edges ». *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49, n° 7, p. 819-33.
- Mittelstedt, Christian, et Martin Schagerl. 2010. « A composite view on Windenburg's problem: Buckling and minimum stiffness requirements of compressively loaded orthotropic plates with edge reinforcements ». *MS International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, n° 3, p. 471-484.
- Niu, M. C.-Y. 1988. *Airframe Structural Design*. Technical Book Co.
- Parnas, Levend, Erian A. Armanios, P. Sriram et Lawrence Rehfield. 1995. « Postbuckling and crippling of I-section composite stiffeners ». *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 8, n° 1, p. 32-42.
- Puck, A., et H. Schürmann. 2002. « Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models ». *Composites Science and Technology*, vol. 62, n° 12–13, p. 1633-1662.

- Qiao, Pizhong, Julio F. Davalos et Jialai Wang. 2001. « Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis ». *Journal of structural engineering New York, N.Y.*, vol. 127, n° 3, p. 245-255.
- Qiao, Pizhong, et Luyang Shan. 2005. « Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes ». *Composite Structures*, vol. 70, n° 4, p. 468-483.
- Qiao, Pizhong, et Guiping Zou. 2002. « Local buckling of elastically restrained fiber-reinforced plastic plates and its application to box sections ». *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, n° 12, p. 1324-1330.
- Qiao, Pizhong, et Gulping Zou. 2003. « Local buckling of composite fiber-reinforced plastic wide-flange sections ». *Journal of Structural Engineering*, vol. 129, n° 1, p. 125-129.
- Sadeghifar, M., M. Bagheri et A. A. Jafari. 2010. « Multiobjective optimization of orthogonally stiffened cylindrical shells for minimum weight and maximum axial buckling load ». *Thin-Walled Structures*, vol. 48, n° 12, p. 979-988.
- Sapkas, Akos, et Laszlo P. Kollar. 2002. « Lateral-torsional buckling of composite beams ». *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n° 11, p. 2939-2963.
- Sauvé, Jérémie et al. 2013. « Exact Buckling Solution of Composite Web/Flange Assembly ». In *The 19th International Conference on Composite Materials*. (Montréal, Québec, Canada).
- Shan, Luyang, et Pizhong Qiao. 2008. « Explicit local buckling analysis of rotationally restrained composite plates under uniaxial compression ». *Engineering Structures*, vol. 30, n° 1, p. 126-140.
- Shanley, F. R. 1949. « Simplified analysis of general instability of stiffened shells in pure bending ». *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 16, n° 10, p. 590-592.
- Tarjan, Gabriella, et Laszlo P. Kollar. 2010. « Buckling of axially loaded composite plates with restrained edges ». *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 29, n° 23, p. 3521-3529.
- Tarjan, Gabriella, Akos Sapkas et Laszla P. Kollar. 2010. « Local web buckling of composite (FRP) beams ». *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 29, n° 10, p. 1451-1462.
- Taylor, J. L. 1936. *Stability of a monocoque in compression*. London: Stat. Off.
- Timoshenko, Stephen Gere James Monroe. 1961. *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill.

- Tofallis, Chris. 2009. « Least Squares Percentage Regression ». *Journal of Modern Applied Statistical Methods*.
- Tsai, Stephen W., et Edward M. Wu. 1971. « A General Theory of Strength for Anisotropic Materials ». *Journal of Composite Materials*, vol. 5, n° 1, p. 58-80.
- Turvey, G. J., et I. H. Marshall. 1995. *Buckling and postbuckling of composite plates*. New York, N.Y.: Chapman and Hall.
- Walker, Mark. 1998. « Multiobjective optimization of laminated I-beams for maximum crippling, buckling and postbuckling strength ». *Composites Part B: Engineering*, vol. 29, n° 3, p. 263-270.
- Weigraeber, P., C. Mittelstedt et W. Becker. 2012. « Buckling of composite panels: A criterion for optimum stiffener design ». *Aerospace Science and Technology*, vol. 16, n° 1, p. 10-18.
- Windenburg, Dwight. 1938. « The Elastic Stability of Tee Stiffeners ». vol. United States Experimental Model Basin, n° Report No. 457.
- Zinoviev, Peter A., Sergei V. Grigoriev, Olga V. Lebedeva et Ludmilla P. Tairova. 1998. « The strength of multilayered composites under a plane-stress state ». *Composites Science and Technology*, vol. 58, n° 7, p. 1209-1223.